Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm **022**

=Übungskapitel

Die besonderen sonderbaren Punkte im Dreieck

H,S,U und I im positiven Koordinatensystem

Konstruktion

Erforderlicher Wissensstand (->Stoffübersicht im Detail siehe auch Wissensleuchtturm der UE-und 3.Kl.)

Kenntnis des positiven Koordinatensystems

positive Koordinaten;

Lage von Punkten im Koordinatensystem

Kenntnis der Begriffe : Besondere Punkte im Dreieck und deren Konstruktion: Höhenschnittpunkt,Umkreismittelpunkt,Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt.

Eulersche Gerade. Umkreis und Inkreis. Der Winkel. Die Winkelsymmetrale.

Seitensymmetralen, Höhen, Winkelhalbierende, Schwerlinien

(Know- How->siehe Wissensleuchtturm der UE-&.3.Klasse)

Ziel dieses Kapitels (dieses Übungsleuchtturms) ist:

Vertiefendes Training der Konstruktion von H,S,U und I

Im Lösungsteil (Theorieteil) ab Seite 20 findest du zum Stoffhintergrund Konstruktionsanleitungen und Grafiken als Veranschaulichungen ! In den Lösungen gibt es immer wieder Grafiken der Konstruktionen zum Überprüfen.

Lösungen findest du ab Seite 8

Beachte den Theorieteil (Wissen) ab Seite 20 !

1 Der Umkreismittelpunkt-Umkreis

Ü1 *Konstruiere das Dreieck ABC.*

Einheit auf den Achsen: 1cm!!!

Ermittle konstruktiv <u>am Zeichenblatt</u> die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U

und zeichne den Umkreis!

Bestimme weiters die Koordinaten der 3 Seitenmittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{AC}

sowie die Länge des Umkreisradius r

1.) Fall1: **spitzwinkeliges** Dreieck

der Umkreismittelpunkt liegt **innerhalb** der Dreiecksfläche

$A(5/5{,}5) \quad B(7/0{,}5) \quad C(0{,}5/2)$ 5,5cm bedeutet 11 Kästchen als Norm

2.) Fall2: **stumpfwinkeliges** Dreieck

der Umkreismittelpunkt liegt **außerhalb** der Dreiecksfläche

$A(1{,}5/5) \quad B(9{,}5/2{,}5) \quad C(5{,}5/6)$ 2,5cm bedeute t 5 Kästchen als Norm

3.) Fall3: **rechtwinkeliges** Dreieck

der Umkreismittelpunkt liegt **genau auf der Dreiecksseite c- als Mittelpunkt dieser**

$A(1/0{,}5) \quad B(7/2{,}5) \quad C(3/4{,}5)$ 2,5cm bedeutet 5 Kästchen als Norm

2 H Der Höhenschnittpunkt

Ü2 *Konstruiere das Dreieck ABC.*

Einheit auf den Achsen: 1cm!!!

Ermittle konstruktiv <u>am Zeichenblatt</u> die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H

Bestimme weiters die Koordinaten der 3 Höhenfußpunkte $F_a \quad F_b \quad F_c$

1.) Fall1: **spitzwinkeliges** Dreieck

der Höhenschnittpunkt liegt **innerhalb** der Dreiecksfläche

$A\left(2/3{,}5\right) \quad B\left(10/5{,}5\right) \quad C\left(6/9{,}5\right)$

2.) Fall2: **stumpfwinkeliges** Dreieck

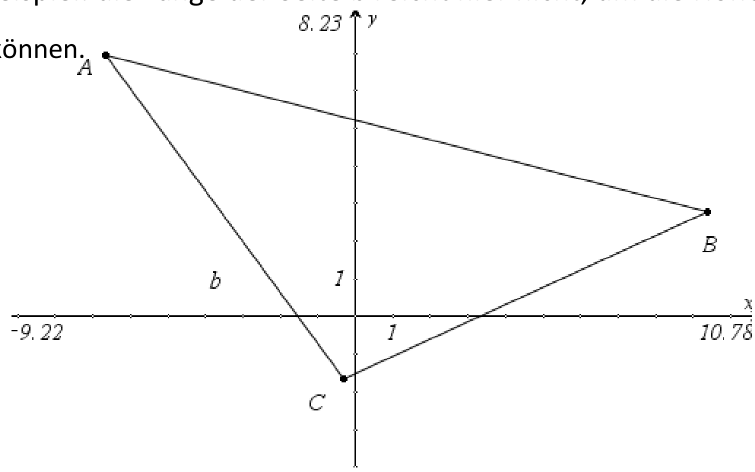
der Höhenschnittpunkt liegt **außerhalb** der Dreiecksfläche

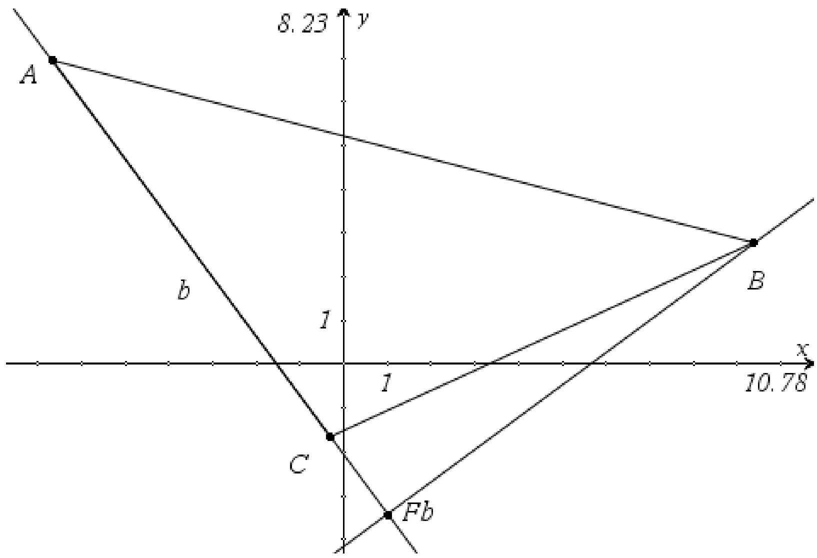
$A\left(1{,}5/6{,}5\right) \quad B\left(7{,}5/6\right) \quad C\left(9{,}5/9{,}5\right)$

Bemerkung zu 2.):

Beachte beim Einzeichnen der Höhen- also Legen der Normale auf eine Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt im **stumpfwinkeligen Dreieck**: du musst die Seite oft über *einen Eckpunkt hinaus* verlängern um die Normale =Höhenlinie zeichnen zu können

Ein anschauliches Beispiel: die Länge der Seite b reicht hier nicht, um die Höhe h_b durch den Eckpunkt B legen zu können.





Du musst die Verlängerung der Linie über den Eckpunkt C hinaus zeichnen, also letzten Endes die Strecke $\overline{F_b C}$. Durch den Höhenfußpunkt F_b wird die Normale auf b durch B gelegt.

Genauso gehst du bei der Konstruktion von h_a vor.

Erfahrungsgemäß habe ich beobachtet , dass viele SchülerInnen im stumpfwinkeligen Dreieck nicht wissen, wo sie die Normale anlegen sollen, "da die Linie nicht da ist, um durch den gegenüberliegenden Eckpunkt die Normale zu legen……."!

Daher: Übung macht den/die MeisterIN!!!

3 S Der Schwerpunkt

Ü3 *Konstruiere das Dreieck ABC.*

Einheit auf den Achsen: 1cm!!!

Ermittle konstruktiv <u>am Zeichenblatt</u> die Koordinaten des Schwerpunkts S

Bestimme auch die Koordinaten der 3 Seitenmittelpunkte M_{AB} , M_{BC} , M_{AC}

1.) **spitzwinkeliges Dreieck**

$A\,(2/1{,}5) \quad B\,(10/5{,}5) \quad C\,(6{,}5/10)$

2.) **stumpfwinkeliges Dreieck**

$A\,(0{,}5/3) \quad B\,(13{,}5/11) \quad C\,(8{,}5/10)$

4

Der Inkreismittelpunkt

Ü4

Konstruiere das Dreieck ABC.

*Ermittle die Koordinaten des **Inkreismittelpunkts I** konstruktiv auf dem Zeichenblatt und zeichne den **Inkreis!***

*Gib weiters die Koordinaten der 3 **Berührpunkte des Inkreises des Dreiecks***

T_1, T_2 *und* T_3 *an!*

*sowie die Länge des **Inkreisradius*** ρ

1.) spitzwinkeliges Dreieck

$A\,(10/0{,}5) \quad B\,(11/10.{,}5) \quad C\,(5/7{,}5)$

2.) stumpfwinkeliges Dreieck

$A\,(0{,}5/1) \quad B\,(6{,}5/2{,}5) \quad C\,(6{,}5/6)$

Einheit auf den Achsen: 1cm!!!

Lösungen

Übungsleuchtturm 022

=Übungskapitel

Ü1 *Der Umkreismittelpunkt U*

1.) *Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.*

$M_{AB}\,(6/3) = M_c \quad M_{BC}\,(3{,}8/1{,}3) = M_a \quad M_{AC}\,(2{,}8/3{,}8) = M_b$

Koordinaten der 3 Seitenmittelpunkte

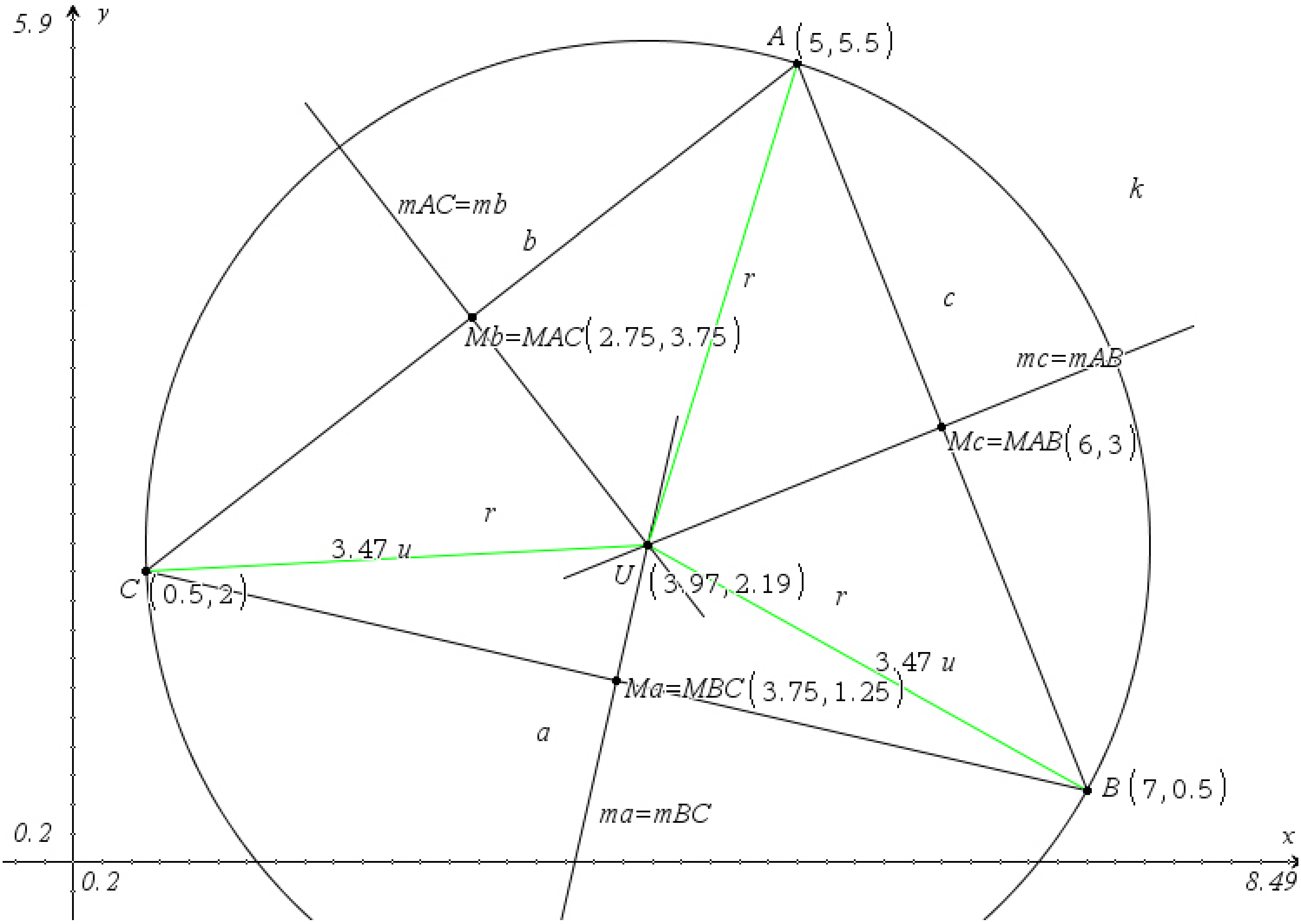
$U\,(4/2{,}2)$ Koordinaten des Umkreismittelpunkts

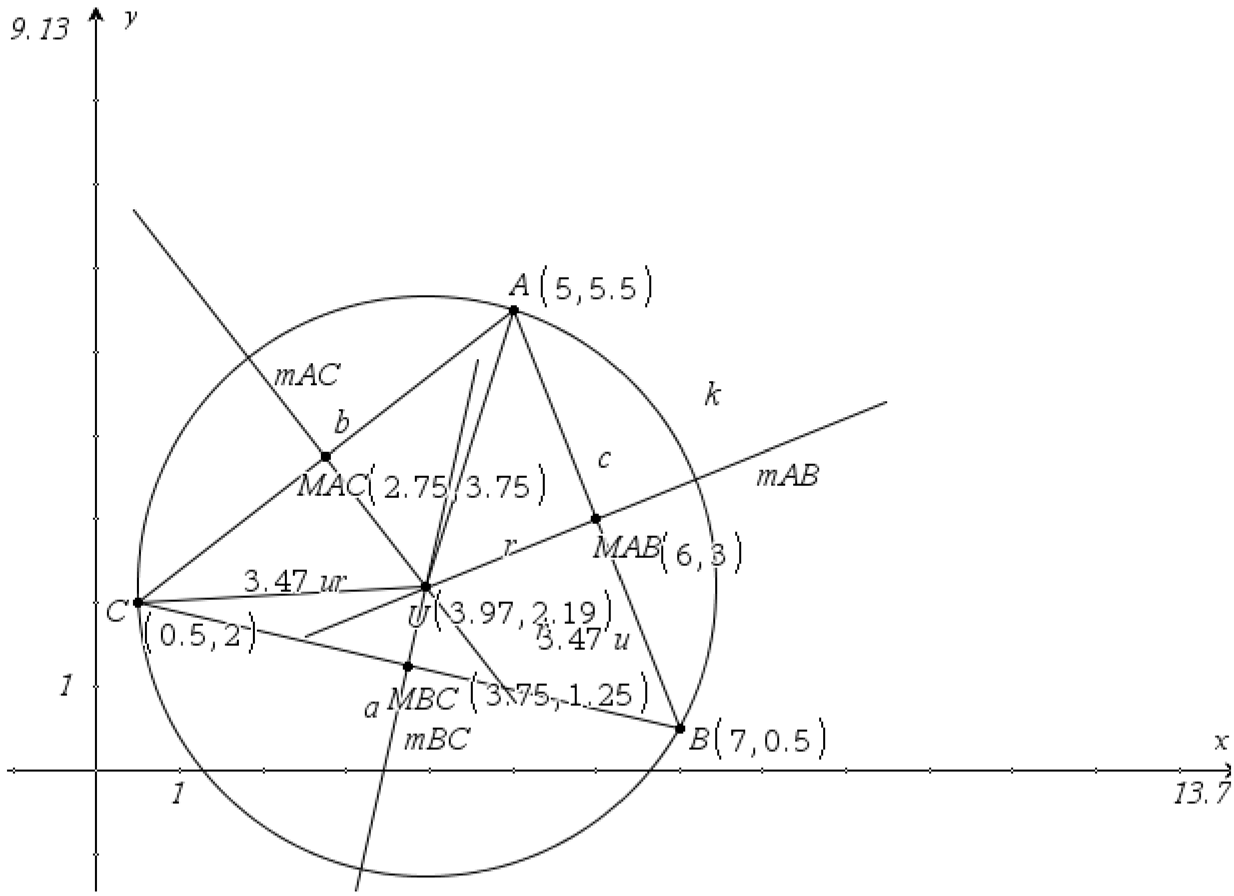
$r = 3{,}5\ LE$ Länge des Umkreisradius r

Bemerkung: Aus Übersichtsgründen ist hier auch ein Teil des erweiterten Koordinatensystems abgebildet.

Zoom:

Der Umkreisradius r ist färbig (grün) eingezeichnet




9.13
y
A (5, 5.5)
mAC
k
b
c
mAB
MAC (2.75, 3.75)
MAB (6, 3)
r
3.47 ur
C
U (3.97, 2.19)
(0.5, 2)
3.47 u
1
a MBC (3.75, 1.25)
mBC
B (7, 0.5)
x
1
13.7

Ü1 *Der Umkreismittelpunkt U*

2.) *Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.*

Das rote Dreieck ist das Originaldreieck (stumpf)

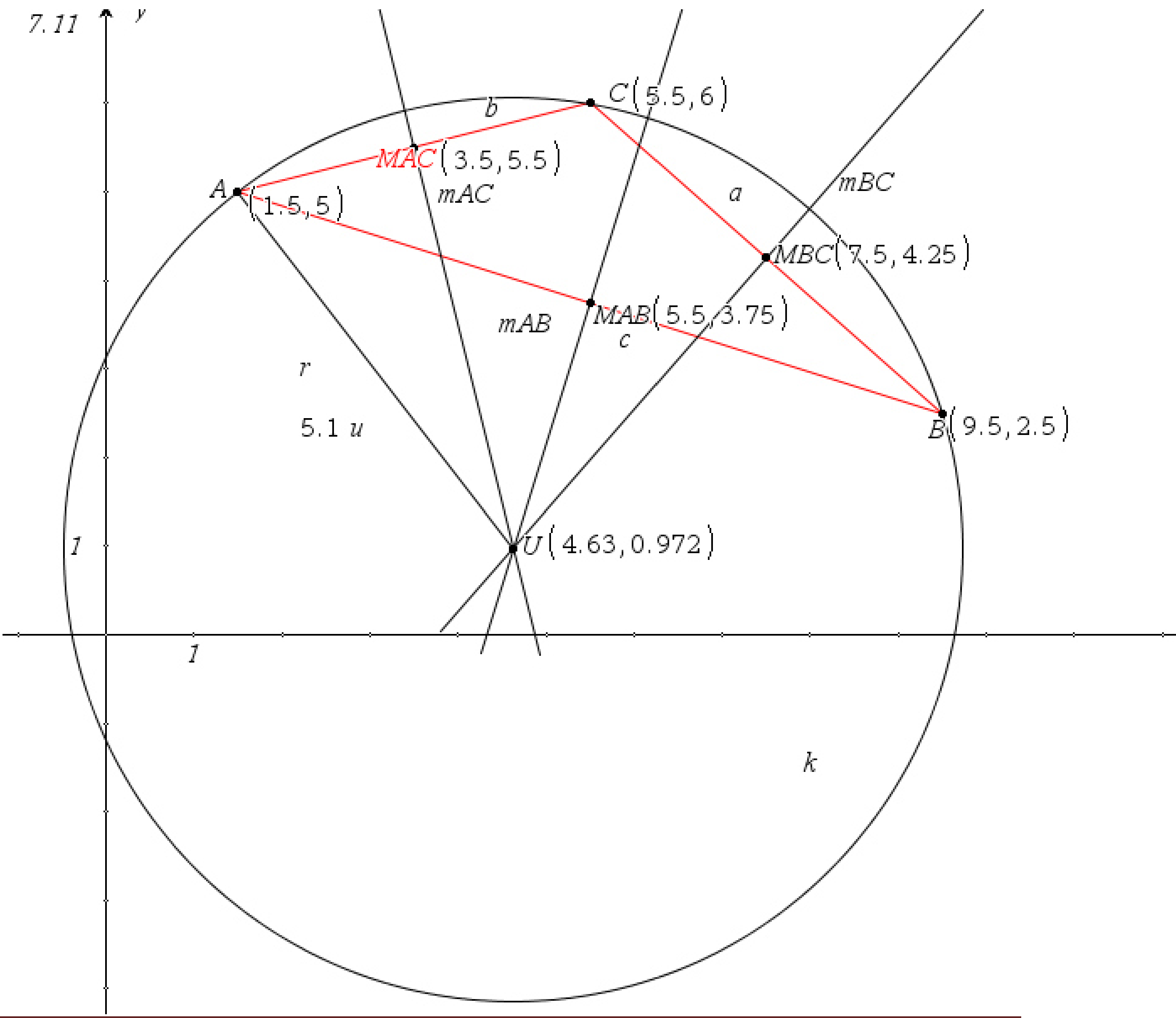
$M_{AB}\ (5{,}5/3{,}8)\quad M_{BC}\ (7{,}5/4{,}3)\quad M_{AC}\ (3{,}5/5{,}5)$

Koordinaten der 3 Seitenmittelpunkte

$U\ (4{,}6/1)$ Koordinaten des Umkreismittelpunkts

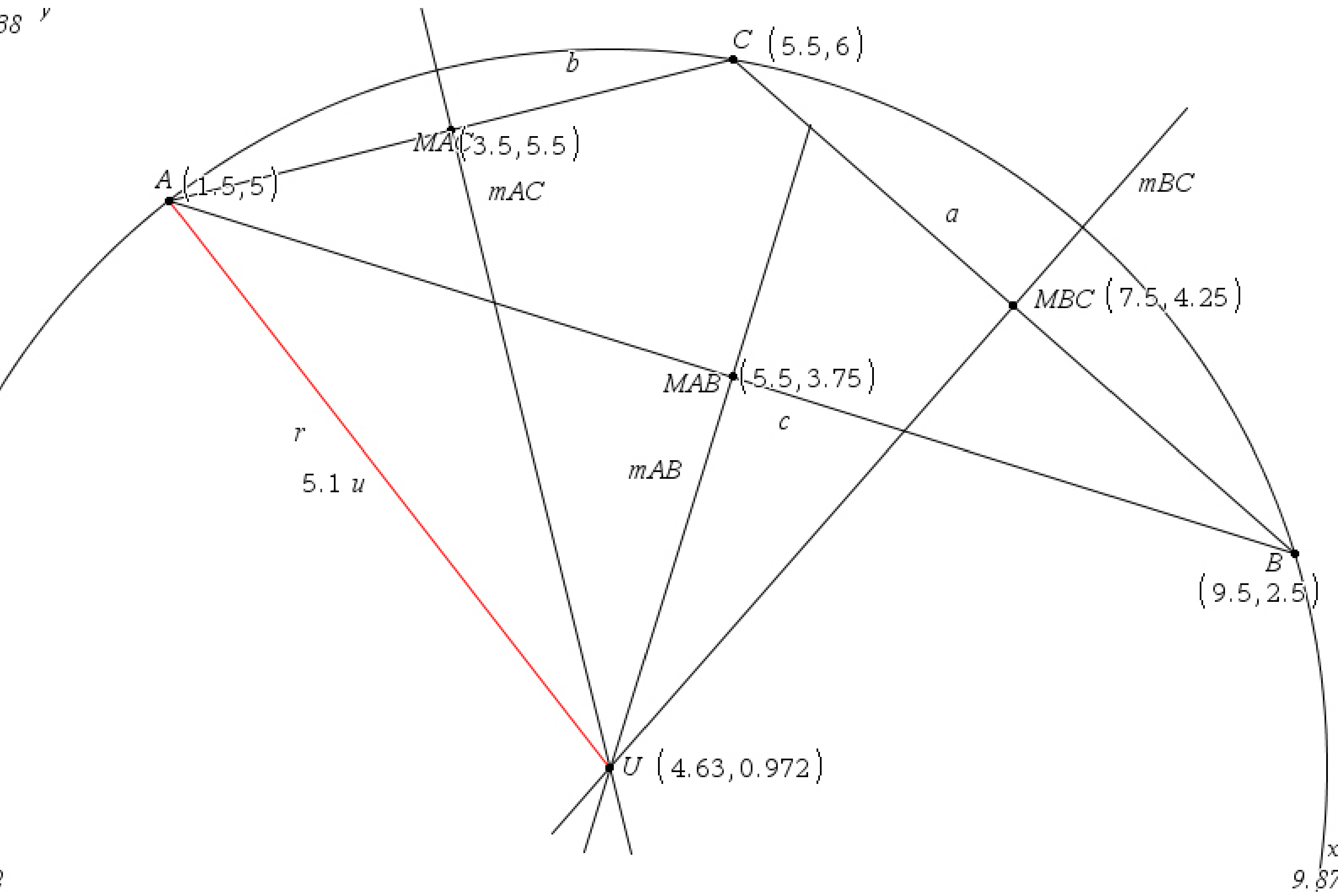
$r = 5{,}1 LE$ Länge des Umkreisradius

Bemerkung: es ist hier auch ein Teil des erweiterten Koordinatensystems abgebildet.



Zoom

Der Umkreisradius r ist färbig (rot) eingezeichnet



Ü1 *Der Umkreismittelpunkt U*

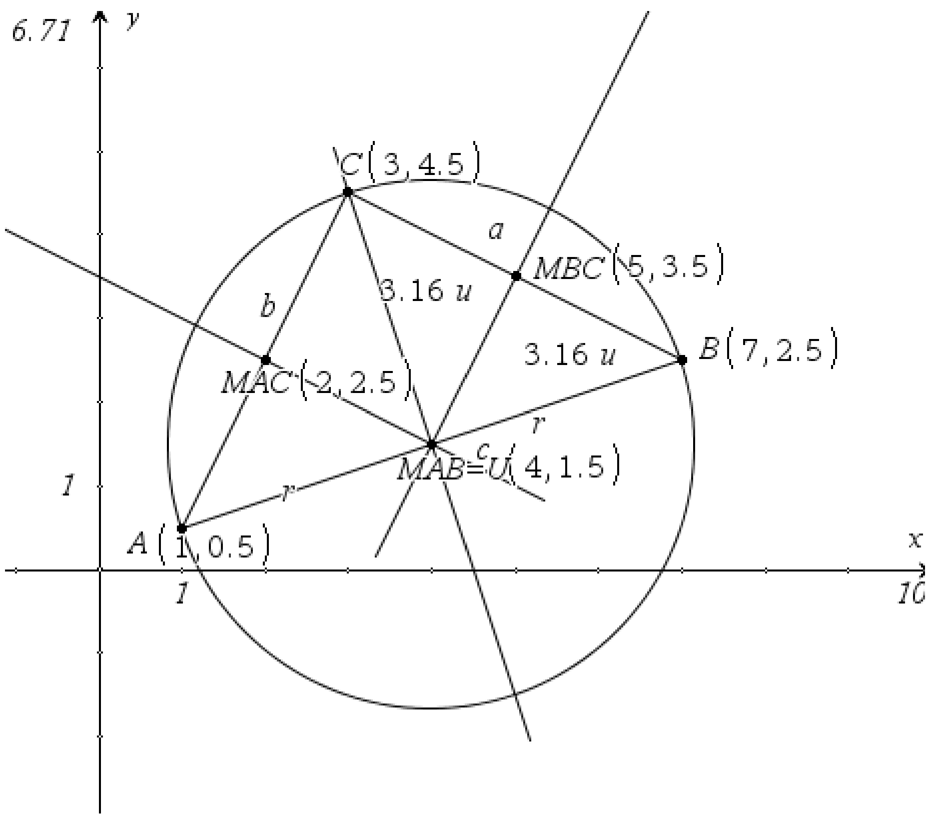
3.) *Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.*

$M_{AB}\ (4/1{,}5)=U!!!!\quad M_{BC}\ (5/3{,}5)\quad M_{AC}\ (2/2{,}5)$ Koordinaten der 3 Seitenmittelpunkte

$U\ (4/1{,}5)$ Koordinaten des Umkreismittelpunkts

$r=3{,}2\ LE$ Länge des Umkreisradius

Bemerkung: es ist hier auch ein Teil des erweiterten Koordinatensystems abgebildet

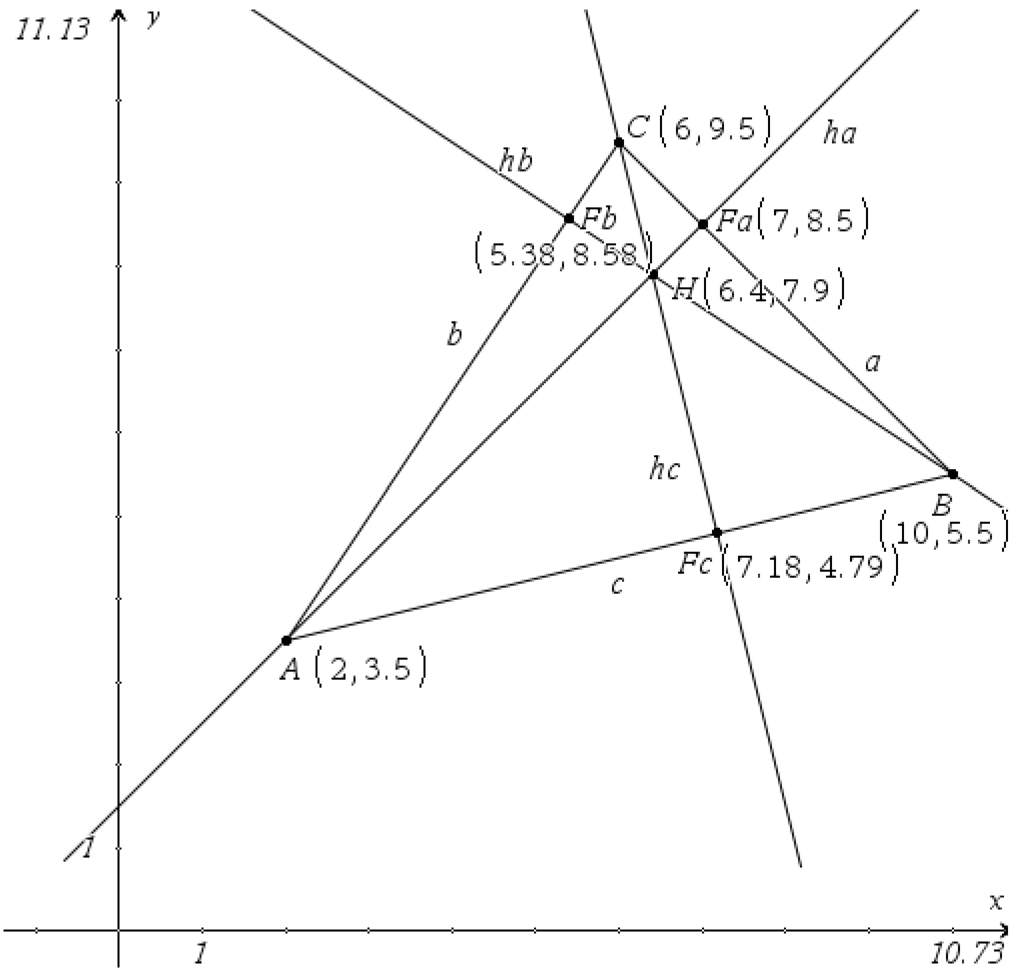


Ü2 1.)

Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet , in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.

$F_c\ (7{,}2/4{,}8)\quad F_a\ (7/8{,}5)\quad F_b\ (5{,}4/8{,}6)$

$H\ (6{,}4/7{,}9)$



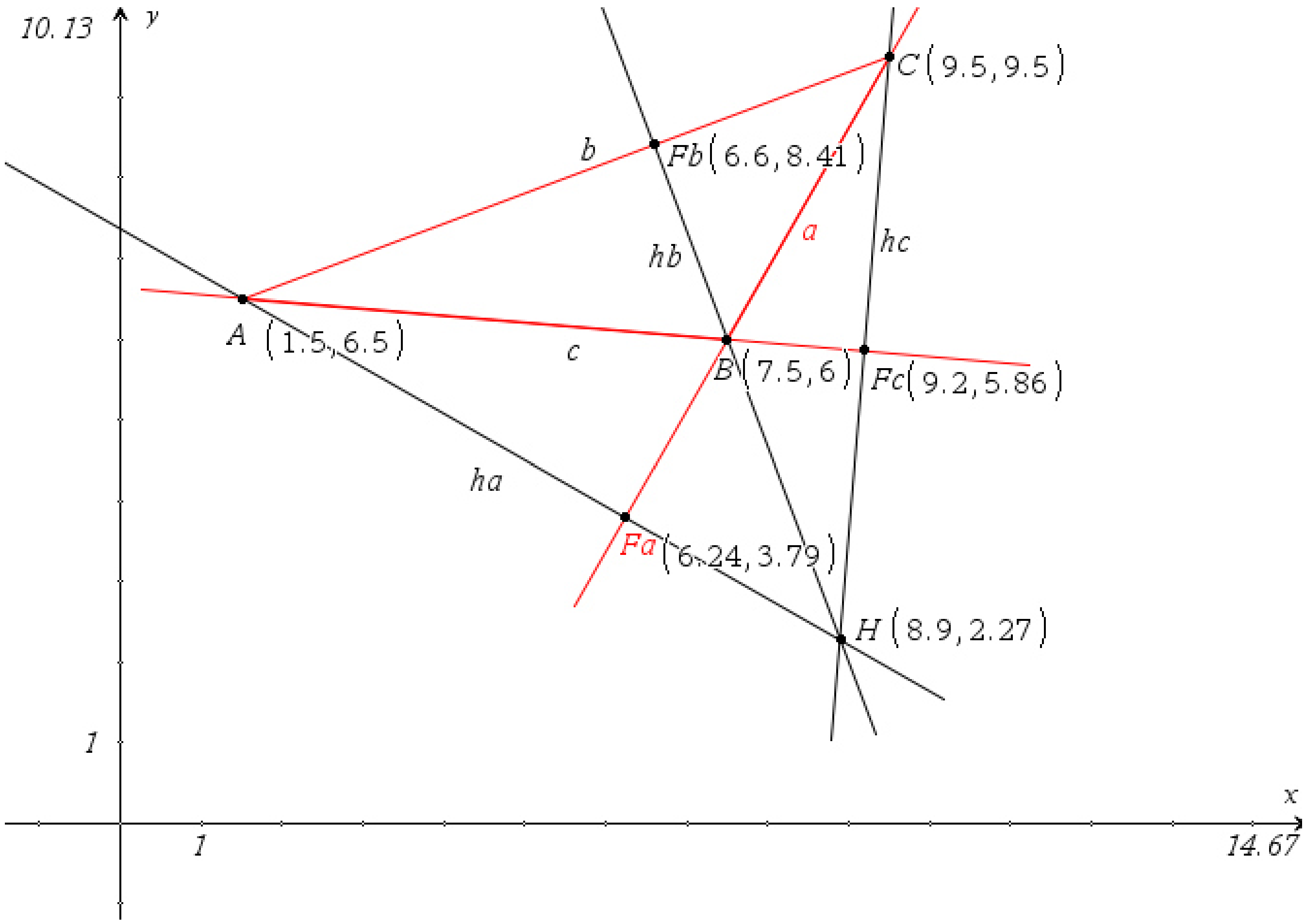
Ü2 2.)

Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.

Das rote Dreieck ist das Originaldreieck (stumpf)mit den verlängerten Seiten, die zur Konstruktion des H außerhalb der Dreiecksfläche dienen

$F_c\ (9{,}2/5{,}9)$ $F_a\ (6{,}2/3{,}8)$ $F_b\ (6{,}6/8{,}4)$

$H\ (8{,}9/2{,}3)$



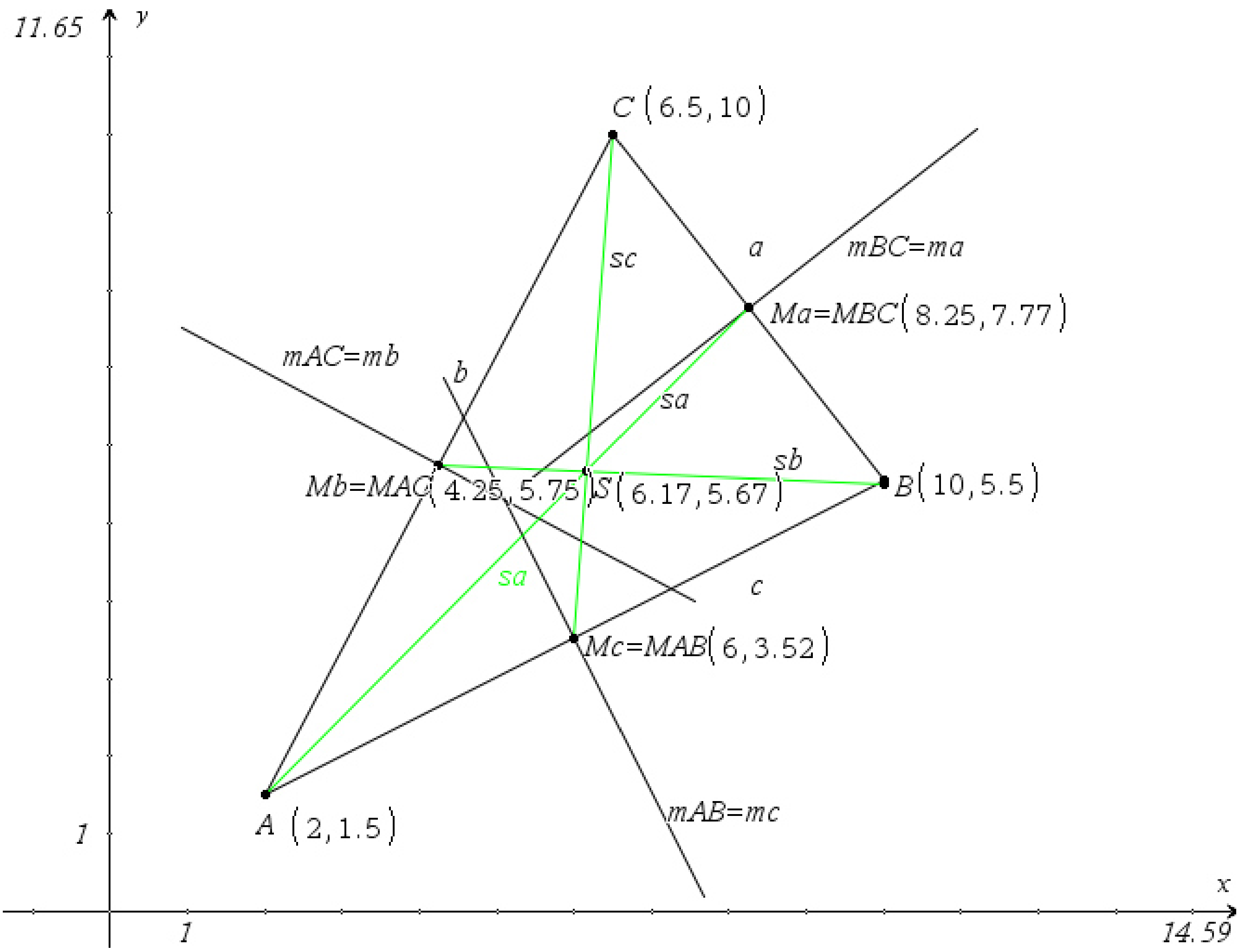
Ü3 1.)

Die Schwerlinien sind stets färbig eingezeichnet, die Strecken (Seiten-) symmetralen sind nur hier in der 1.Grafik auch eingezeichnet,sie dienen zur Orientierung, damit du siehst, dass die Seite halbiert wird und der Mittelpunkt der Seite definiert wird.

Die folgenden Werte sind meist auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.

$M_{AB}\ (6/3{,}5) = M_c \quad M_{BC}\ (8{,}3/7{,}8) = M_a \quad M_{AC}\ (4{,}3/5{,}8) = Mb$

$S\ (6{,}2/5{,}7)$

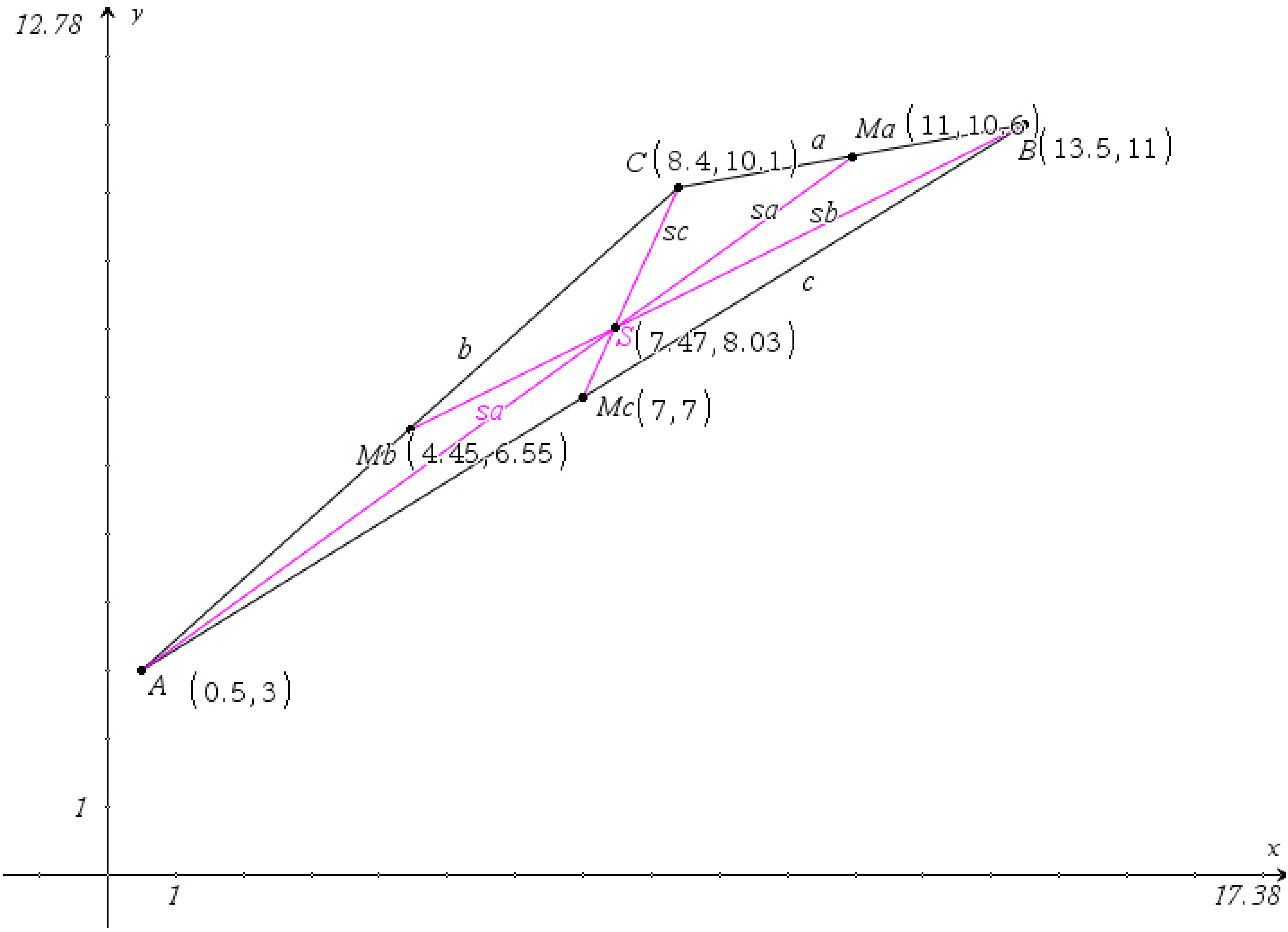


Ü3 2.)

Die folgenden Werte sind meist auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.

$M_{AB}\ (7/7) = M_c \quad M_{BC}\ (11/10{,}6) = M_a \quad M_{AC}\ (4{,}5/6{,}6) = M_b$

$S\ (7{,}5/8)$



Ü4 1.)

Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.

$T_1\ (7{,}4/8{,}7)\quad T_2\ (6{,}5/5{,}4)\quad T_3\ (10{,}6/6{,}4)$

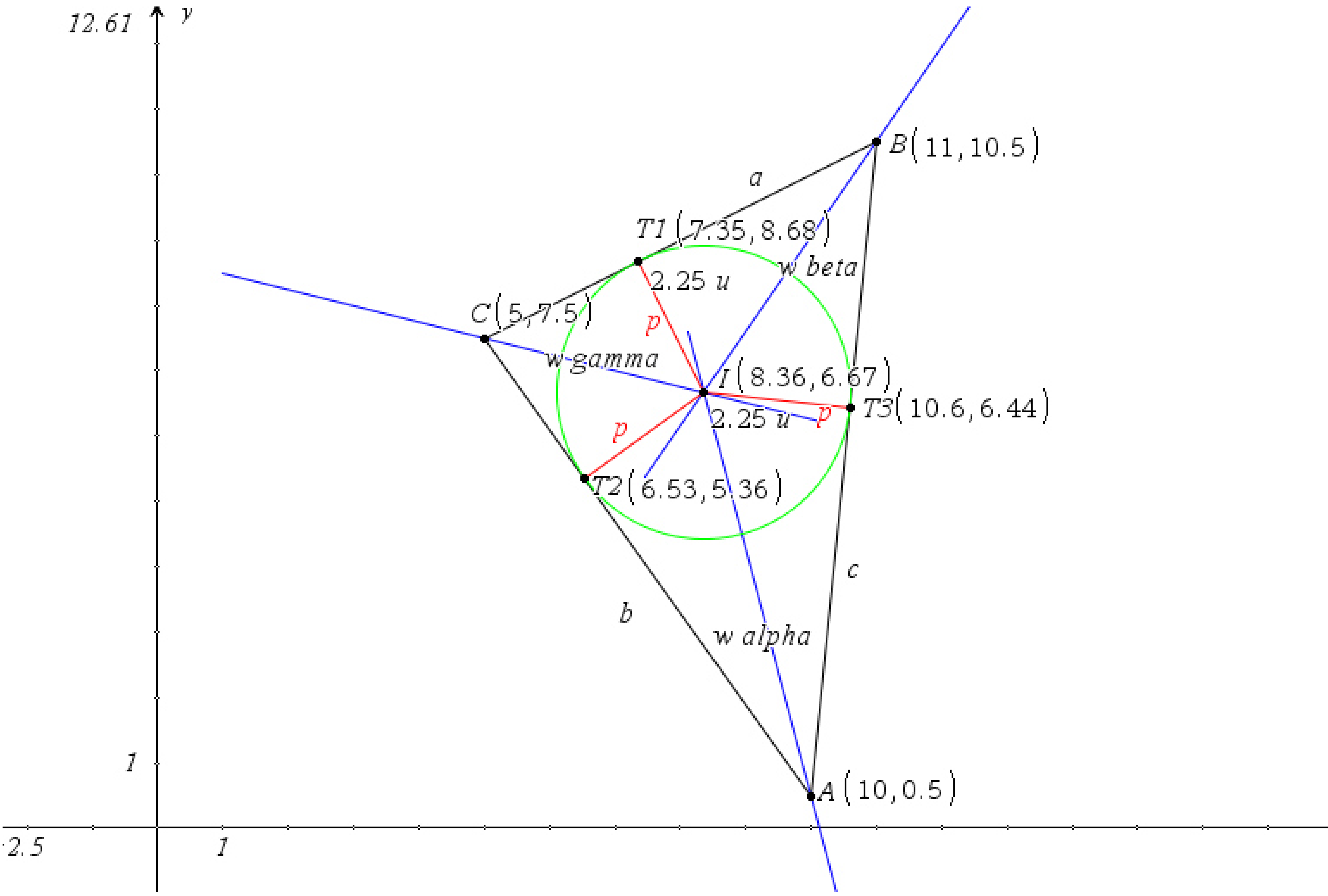
$I\ (8{,}4/6{,}7)$

$\rho = 2{,}3\ \ LE$

Die Länge (Stecke $\overline{IT_1}, \overline{IT_2}, \overline{IT_3}$ des Inkreisradius ρ ist in der Grafik rot eingezeichnet.

Die 3 Winkelsymmetralen sind blau eingezeichnet.

Der Inkreis ist grün eingezeichnet.



Ü4 2.)

Die folgenden Werte sind auf 1 Dezimalstelle gerundet, in der untenstehenden Lösungsgraphik findest du exakte Werte.

$T_1\ (6{,}5/3{,}4)\quad T_2\ (4{,}5/4{,}4)\quad T_3\ (5{,}6/2{,}3)$

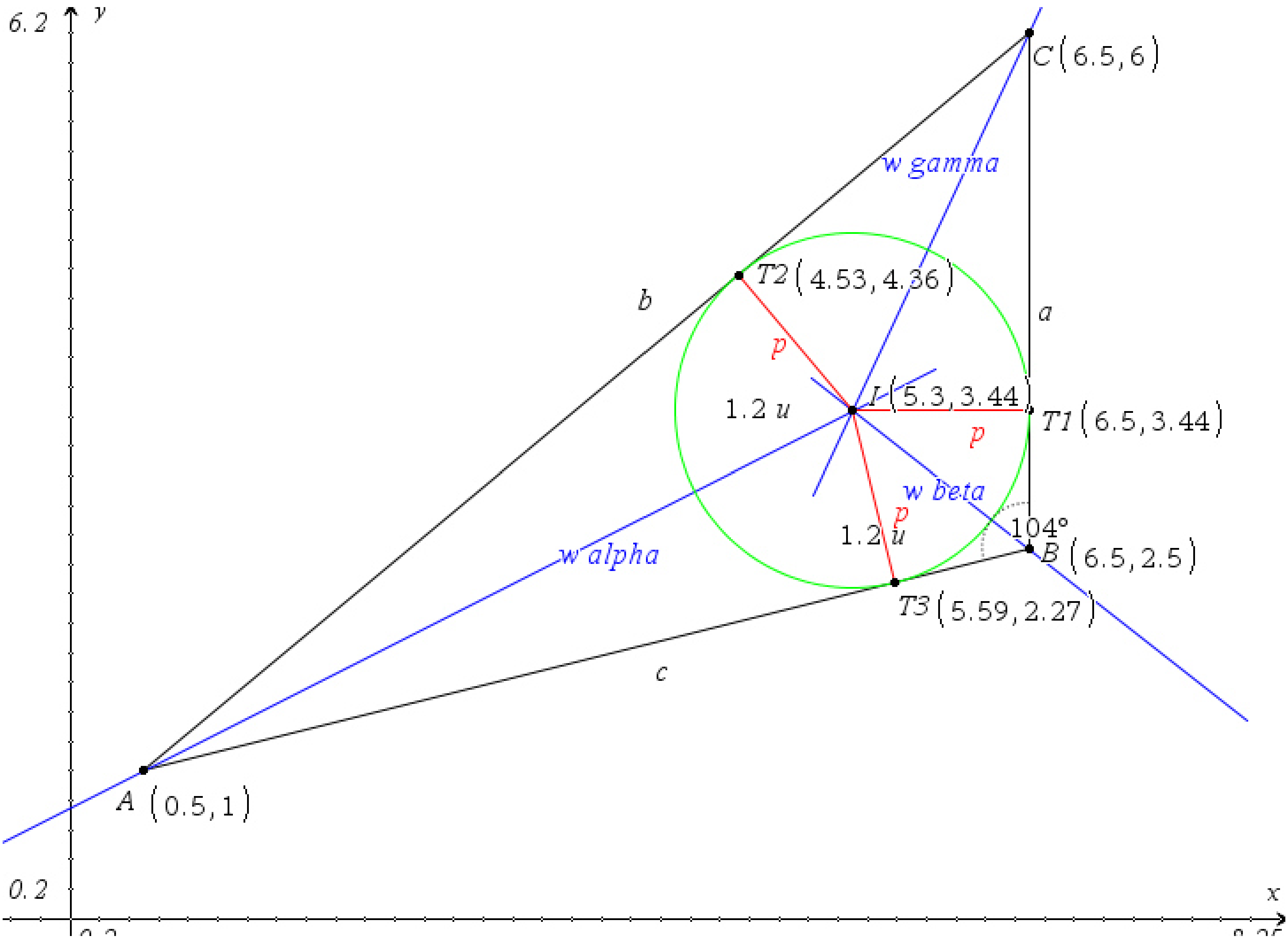
$I\ (5{,}3/3{,}4)$

$\rho = 1{,}2\ \ LE$

Die Länge (Stecke $\overline{IT_1}, \overline{IT_2}, \overline{IT_3}$ des Inkreisradius ρ ist in der Grafik rot eingezeichnet.

Die 3 Winkelsymmetralen sind blau eingezeichnet.

Der Inkreis ist grün eingezeichnet



Theorieteil

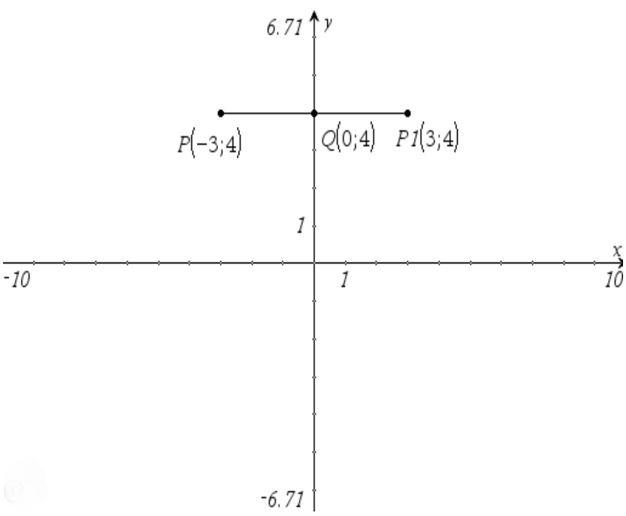
1 Der Umkreismittelpunkt-Umkreis

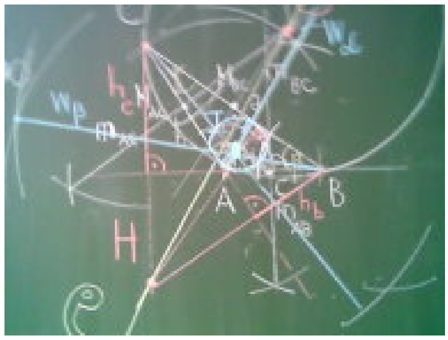
Zeichnen wir auf alle Dreiecksseiten jeweils eine **Streckensymmetrale**- sie werden im Dreieck **Seitensymmetralen** genannt- so erhalten wir durch deren Schnitt die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U.

Die Konstruktion der Streckensymmetrale entspricht in folgendem Sinne der Spiegelung unserer vorherigen Wissenschili, die die unten angeführte Graphik nochmals veranschaulicht

*Q ist der **Mittelpunkt (Halbierungspunkt)** der Strecke* $\overline{PP_1}$.

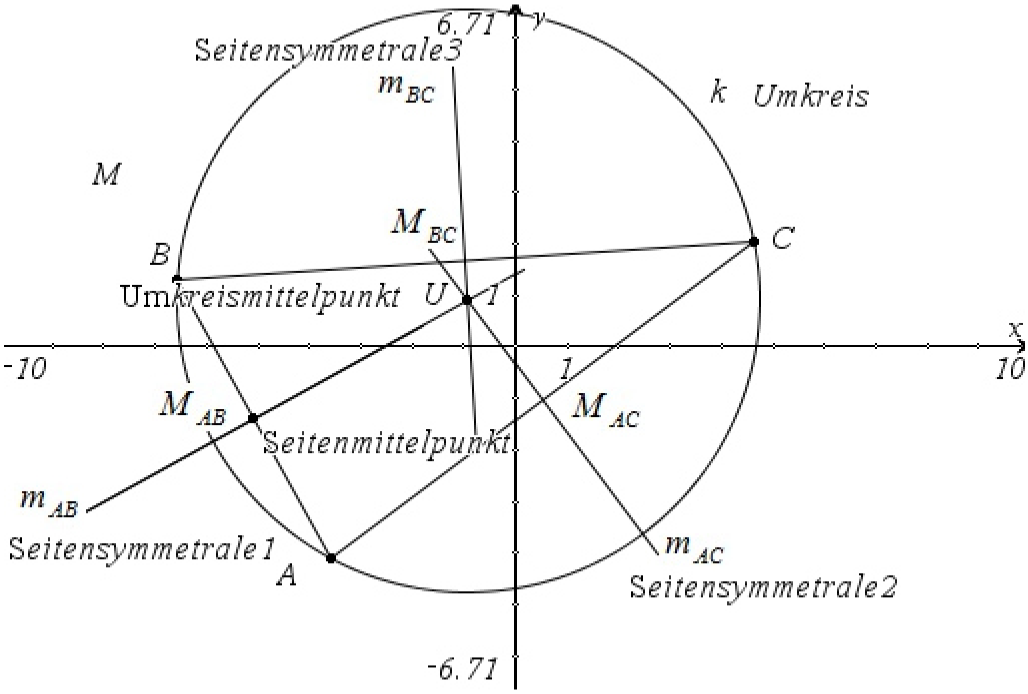
*Die y-Achse ist die **Streckensymmetrale** der Strecke* $\overline{PP_1}$ *.Im Dreieck werden wir sie **Seitensymmetrale** nennen.*





Tafelkonstruktion der Eulerschen Geraden e

Hier sei nun als Veranschaulichung eine Konstruktion eines Umkreismittelpunkts und Umkreises (im spitzwinkeligen Dreieck) ausgeführt:



M_{AB}......*Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB* M_{AC}........*Mittelpunkt der Seite AC*
M_{BC}.......*Mittelpunkt der Seite BC*

U........Umkreismittelpunkt

m_{AB}.......*Seitensymmetrale auf die Seite AB(c) durch den Mittelpunkt der Seite* M_{AB}
$m_{AC.}$........*Seitensymmetrale auf dieSeite AC(b)durch denMittelpunktder Seite* M_{AC}
m_{BC}..........*Seitensymmetrale auf dieSeite BC(a) durch den Mittelpunktder Seite* M_{BC}

Stichst du in U ein und zeichnest du den Kreis durch alle 3 Eckpunkte des Dreiecks , hast du den Umkreis k konstruiert. **Der Radius des Umkreises** ist : $\boxed{r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}}$

Merke: Die Seitensymmetrale steht normal auf die Dreiecksseite und verläuft durch den Mittelpunkt der Seite. (und steht in diesem normal). Sie verläuft (im Allgemeinen) **nicht** durch den *gegenüberliegenden Eckpunkt* (wäre Zufall!)

Der Umkreismittelpunkt U liegt beim **spitzwinkeligen Dreieck innerhalb** ,

beim **stumpfwinkeligen** Dreieck **außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkeligen Dreieck ist er der Mittelpunkt der Hypotenuse.

2 H Der Höhenschnittpunkt

Die Höhe ist eine ***Normale*** *auf die Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.*

Die Höhe wird auch Höhenlinie genannt. Höhe bedeutet eigentlich eine begrenzte Länge ,

Höhenlinie die verlängerte Gerade. In der Praxis wird aber eigentlich nicht unterschieden.

Der Schnitt der 3 Höhen(-linien) in einem Punkt ergibt den ***Höhenschittpunkt H.***

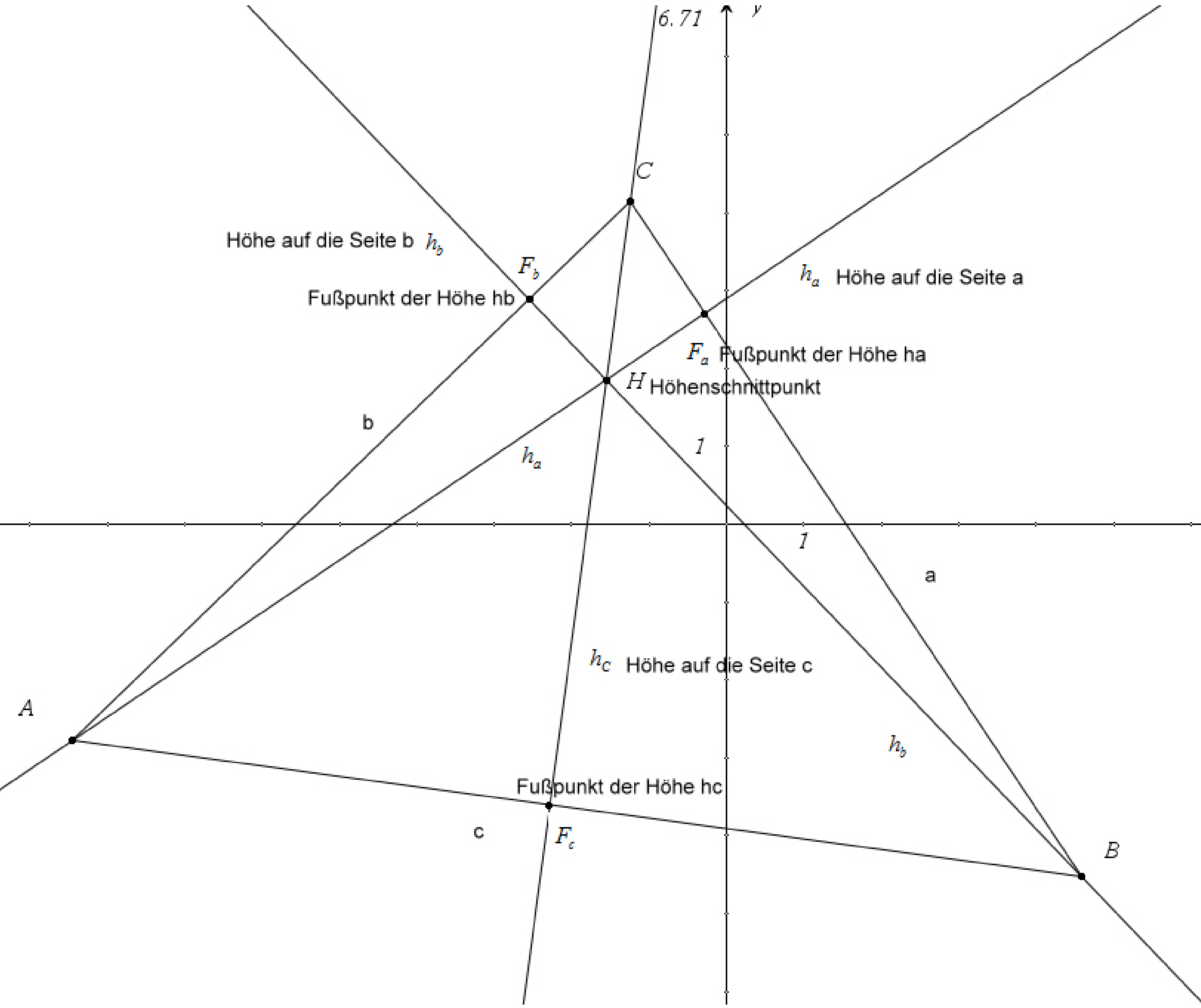
Konstruktionsgang für die Höhe:

Lege das Geodreieck **normal auf eine Seite** an (Nulllinie auf der Seite wie auf der Abbildung unten!) und ziehe eine Linie (=Normale) **durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.**

Merke: Der Höhenschnittpunkt H liegt beim **spitzwinkeligen Dreieck innerhalb** ,

beim **stumpfwinkeligen außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkeligen Dreieck ist er der Scheitel des rechten Winkels



Zeichne immer das Symbol des rechten Winkels im Schnitt der Höhen mit den Seiten ein!

F_a......Fußpunkt der Höhe h_a aufdie Seite a = Schnittpunkt derHöhe h_a mitderSeite a

F_b......Fußpunkt der Höhe h_b aufdieSeite b = Schnittpunktder Höhe h_b mitder Seite b

F_c......Fußpunkt der Höhe h_c aufdieSeite c = Schnittpunktder Höhe h_c mitder Seite c

H.........Höhenschnittpunkt

h_c.......Höhe auf die Seite AB (c) (durch den Eckpunkt C)

h_a.......Höhe auf die Seite BC (a) (durch den Eckpunkt A)

h_b.......Höhe auf die Seite AC (b) (durch den Eckpunkt B)

3 Der Schwerpunkt

Die Schwerlinie ist die Verbindung vom Mittelpunkt einer Dreiecksseite zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

*Der Schnitt der 3 Schwerlinien in einem Punkt ergibt den **Schwerpunkt S .***

Er liegt stets innerhalb des Dreiecks!

***Die Schwerlinie steht nicht normal** auf die Dreiecksseite!*

Konstruktionsgang für die Schwerlinie

1.) Halbiere die Seite des Dreiecks mittels Streckensymmetrale (siehe Unterkapitel 1.):“Umkreismittelpunkt“ sowie Veranschaulichung im nächsten Absatz)
Du erhältst den Mittelpunkt der Dreiecksseite.

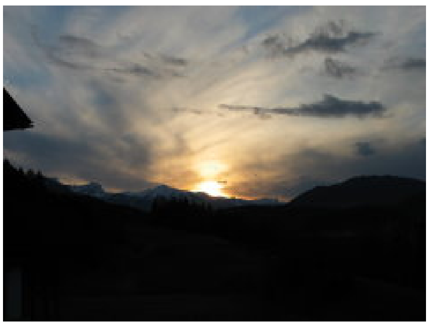
(zeichne eine nicht all zu lange Normale->also nicht über die Seite schneidend hinaus)

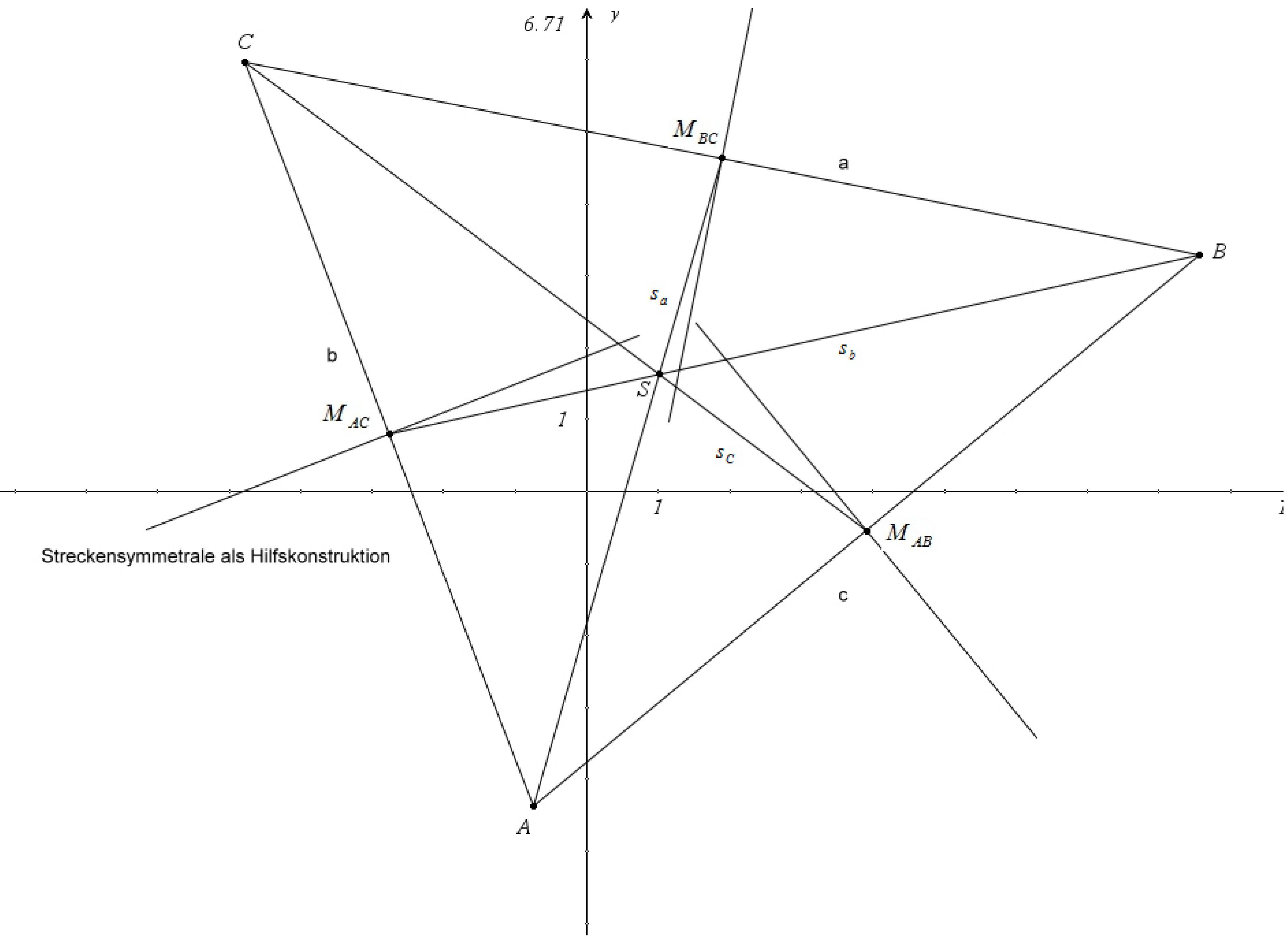
2.) ziehe eine Linie vom *Mittelpunkt* zum *gegenüberliegenden Eckpunkt*

Ein paar Bemerkungen dazu im nächsten Absatz (Veranschaulichung)

Bei der Konstruktion der Schwerlinie selbst gibt es keine Normale, sie ist nur die Verbindung zwischen 2 speziellen Punkten, eine Normale wird nur bei der Konstruktion des Mittelpunkts als Punktermittlung als Hilfslinie gelegt!!!

Merke: **H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.**





M_{AB}......*Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB* M_{AC}........*Mittelpunkt der Seite AC*

M_{BC}.......*Mittelpunkt der Seite BC*

s_a.........*Schwerlinie auf die Seite* $a =$ *Strecke* $\overline{M_{BC}A}$

s_b.........*Schwerlinie auf die Seite* $b =$ *Strecke* $\overline{M_{AC}B}$

s_C...........*Schwerlinie auf die Seite* $c =$ *Strecke* $\overline{M_{AB}C}$

4 Der Inkreismittelpunkt

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der 3 ***Winkelsymmetralen.***

Er liegt immer *innerhalb* der Dreiecksfläche!

Der Inkreis berührt die 3 Dreiecksseiten „von innen“ in den *3 Berührpunkten der Seiten mit dem Inkreis.*

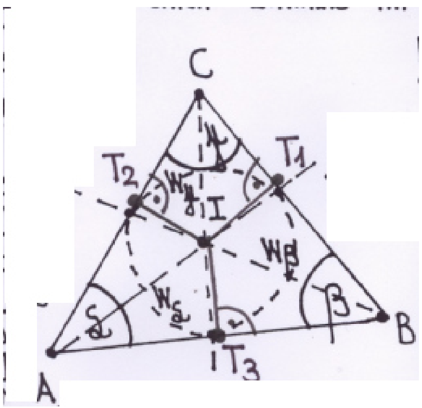
Die Winkelsymmetralen **halbieren** die Winkel, aber die *dem Winkel gegenüberliegenden* Seite im *Allgemeinen nicht und stehen auch nicht auf diese normal!!!!*

Willst du den ***Radius des Inkreises*** ρ *(Rho) konstruieren so ziehst du Normale auf die Dreiecksseiten zum Inkreismittelpunkt I. Der jeweilige Schnittpunkt der Normalen mit der Dreiecksseite wird* ***Berührpunkt des Inkreises*** *genannt. Es gibt also* ***3 Berührpunkte*** *des Inkreises im Dreieck:* T_1, T_2 *und* T_3 *!*

In A ist der Winkel α *(Alpha)*

In B ist der Winkel β *(Beta)*

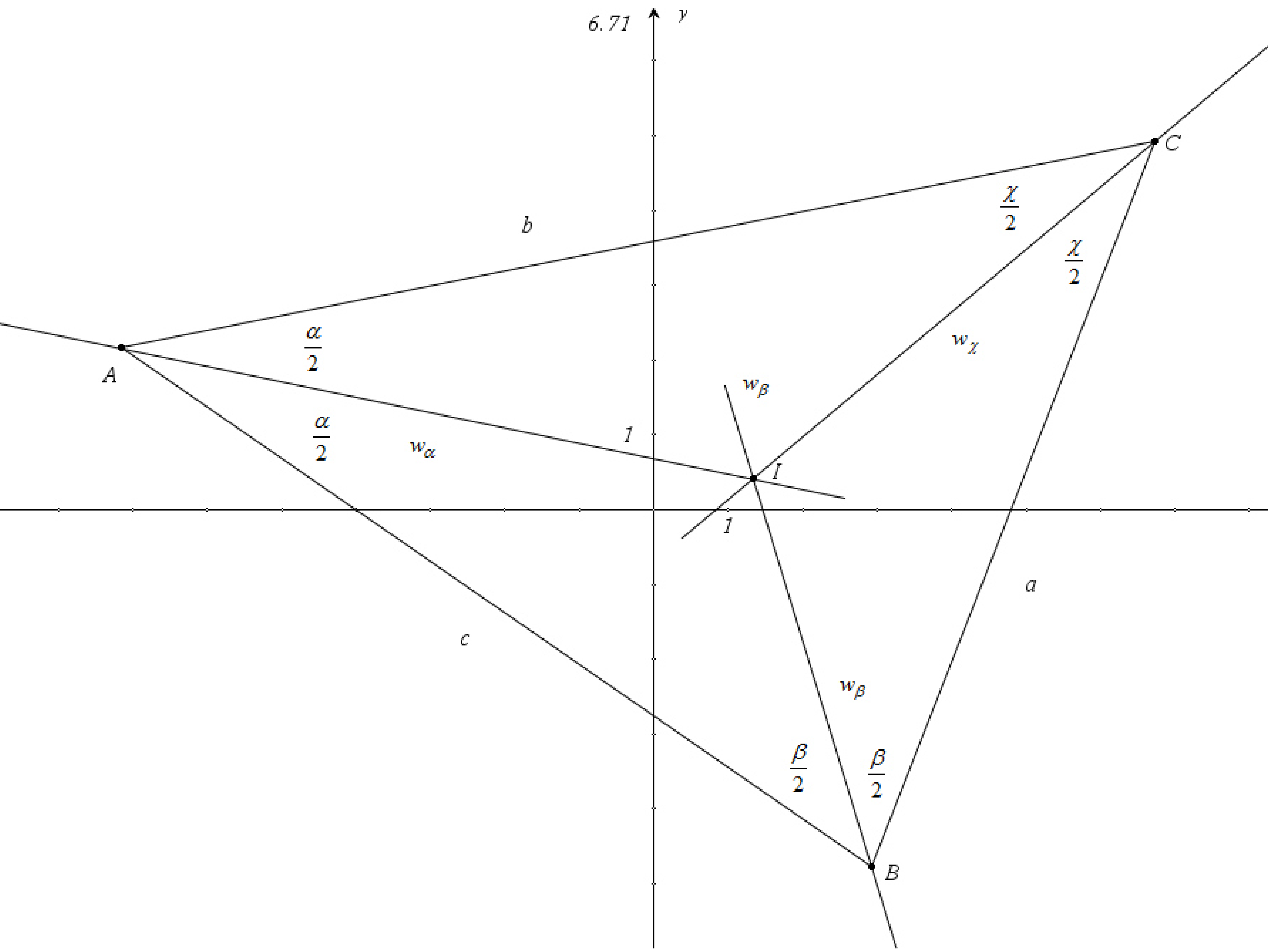
In C ist der Winkel χ *(Gamma)*



Der Inkreis darf nie über eine Dreiecksseite hinausgehen!!!

Passe daher zuerst mit dem Zirkel deinen Kreis in den 3 Seitenberührpunkten an ,bevor du ihn durchziehst!!!

Merke: **H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.**



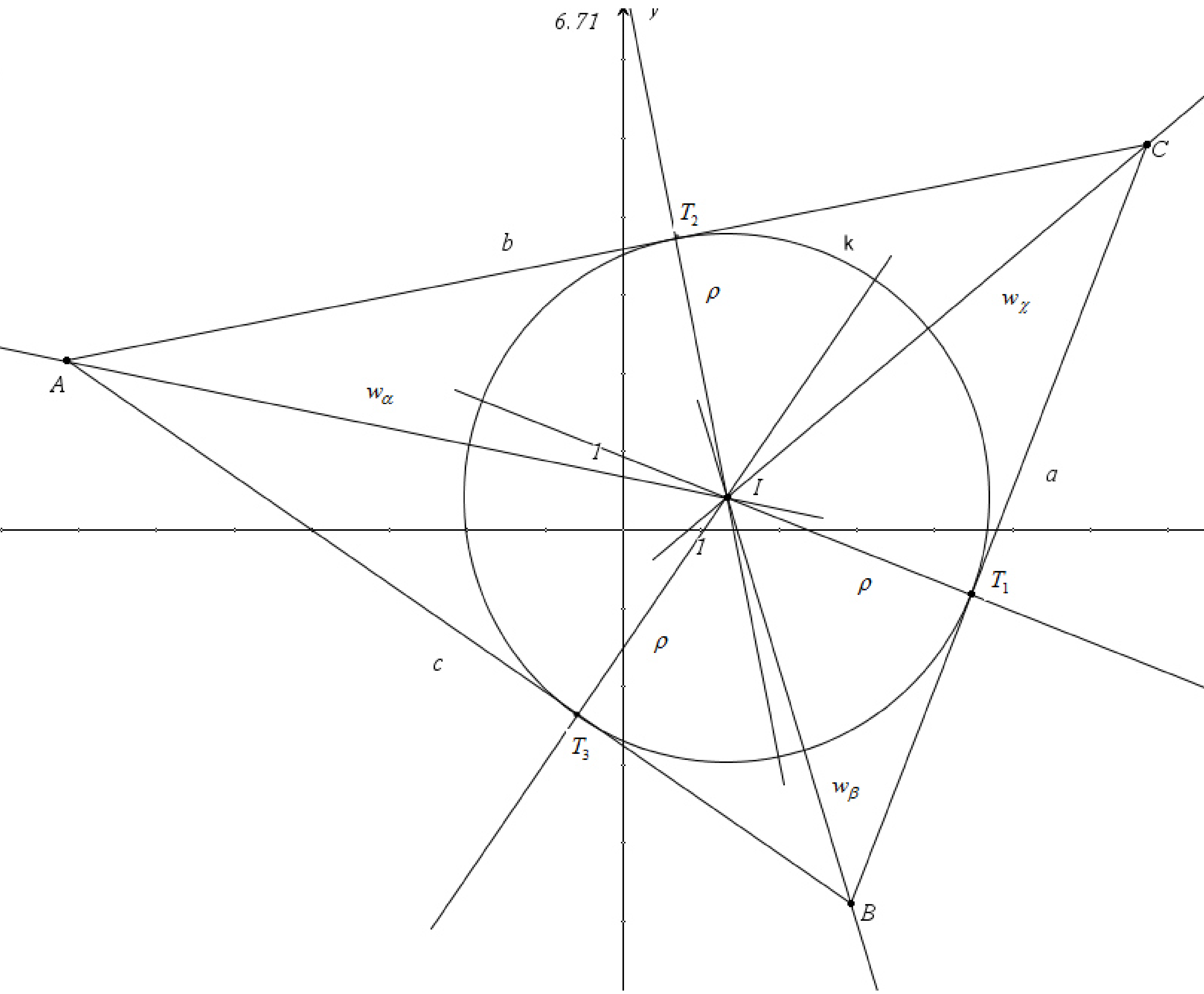
w_α.......*Winkelsymmetrale des Winkels* α w_β.........*Winkelsymmetrale des Winkels* β

w_γ..........*Winkelsymmetrale des Winkels* γ

Die Winkelsymmetralen halbieren also die 3Winkel

T_1.......*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite a* T_2........*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite b*
T_3........*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite c*

ρ......*RHO.....Radius des Inkreises*
I.......*Inkreismittelpunkt*



Die Eulersche Gerade e

Die Eulersche Gerade, benannt nach dem berühmten Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler*, verläuft durch die 3 besonderen Punkte U,H und S in jedem Dreieck, egal ob dieses stumpf-,spitz-oder rechtwinkelig, gleichschenkelig, gleichseitig….. ist.

Sie verläuft **nicht** durch den **Inkreismittelpunkt I !!!!!!!!**

Merke dir:

eUler**S**c**H**e Gerade - >es kommt kein „I" im Text vor

Überlege: *(->>siehe Abbildung)*

Konstruierst du zuerst den Umkreismittelpunkt, hast du bereits den Mittelpunkt der Seiten mit der Normalen bestimmt und hast somit für den Schwerpunkt die Verbindungspunkte.