

Wissensleuchtturm 5.+UE. Klasse

Ein Wissensleuchtturm ist eine *abschließende Zusammenfassung des Stoffs einer Schulstufe* in Schwerpunkt-Übersichtsform am Ende/Anfang eines Blocks von Übungsleuchttürmen einer jeweiligen Klasse und beinhaltet **reine Lerntheorie** (oft mit Musterbeispielen zum Verständnis), welche in Querverbindung mit den Standards der Übungsleuchttürmen steht.

Zusätzliche Stoffgebiete werden in den Lösungen der Übungsleuchttürme stets ausführlich behandelt.

Ich notiere und erkläre nur *Stoffkapitel, die relevant für den „Rätselblock“* der Übungsleuchttürme sind und darin vorkommen!

Stand 8.9.15 wird erweitert!!!

Inhaltsverzeichnis

Wissensleuchtturm zu: →>

001 - zu Übungsleuchtturm Nr.001,002,003 und 004

Symbole und Mengen, Sprache der Mathematik und Aussagen ,Mengenlehre

Zahlenmengen Seite 5

MengenlehreSeite 8

002- zu Übungsleuchtturm Nr.007 & 008

Lineare Gleichungen Seite 17

003- zu Übungsleuchtturm Nr. 009

Lineare GleichungssystemeSeite 19

004- zu Übungsleuchtturm Nr.010

Mischungsaufgaben Seite 23

005- zu Übungsleuchtturm Nr.011 bis 014

Quadratische Gleichungen

Sonderfälle-Lösungsmethoden Seite 29

Die beiden Lösungsformeln Seite 32

006- zu Übungsleuchtturm Nr.016

Quadratische Funktionen und Parabeln.....

Seite 38

007- zu Übungsleuchtturm Nr.017

Der Vektorbegriff der Ebene- analytische Geometrie.....

Seite 48

Addition und Subtraktion von Vektoren

Multiplikation mit einem Skalar (Skalarmultiplikation)

Parallelität von Vektoren S33

Der Nullvektor, Ortsvektor, Richtungsvektor

Der Einheitsvektor

Das Skalarprodukt

Der Normalvektor- orthogonale Vektoren-Linksgekippte- rechtsgekippte Vektoren

Die Orthogonalitätsbedingung

Der Winkel zwischen 2 Vektoren (→Geraden)

Stand 8.9.15 wird erweitert!!!

Wissensleuchtturm

= **Wissenskapitel** 5.Kl.,Übergangsklasse ; 3. & 4.Kl.

Nr. 001

zu Übungsleuchtturm

001 002 003 004

Symbole und Mengen

Sprache der Mathematik

Aussagen - Mengenlehre

Hier nun ein kurzer Überblick über alle mathematische Zahlenmengen sowie *über die wichtigsten mathematischen Symbole*, die wir in der Folge verwenden werden. Wir schlagen dazu das *Buch der mathematischen Symbole und „Vokabeln“* auf. ***Dieses Kapitel deckt auch das Thema der mathematischen Sprache in einer 5.Klasse AHS/BORG/BG ab.***

Für manche Aufgaben des Ü4 benötigst du eventuell Kenntnisse über ganze Zahlen oder über rationale Zahlen der Übungsleuchttürme der 3.Klasse.

Der nun folgende Text ist identisch mit der korrekten Lösung zum Übungsleuchtturm Nr.004 „Lückentext zu Zahlenmengen“

Zahlenmengen



Eine Menge wird grundsätzlich, um sie zu notieren, mit einer geschwungenen Klammer, der **Mengenklammer**, angeschrieben.

$\{ \dots \}$ Beispiel: $E = \{13, 14, 17, 19\}$ 4 Elemente in der Menge

$\{ \}$ leere Menge

es liegt kein (einziges) Element in der Menge

Besondere Zahlenmengen

Die Menge der **natürlichen Zahlen** wird angeschrieben als

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$N^* = N \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

„N Stern“

Menge der **natürlichen Zahlen ohne Null**

So eine Schreibweise bezeichnen wir als aufzählendes Verfahren.

\.....Symbol für „ohne“

Beide Mengen N und N^ sowie Z , Q , und R haben **unendlich viele** Elemente. (siehe nächste Seite)*

Die Menge der **ganzen Zahlen** schreiben wir als

$$Z = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{siehe Übungschilis der 3.Klasse})$$

$$Z^- = \{x \in Z \mid x < 0\} \quad \text{So eine Schreibweise bezeichnen wir als } \underline{\text{beschreibendes Verfahren}}$$

$$Z^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\} \quad \text{Menge der } \underline{\text{negativen ganzen Zahlen}} \text{ als } \underline{\text{aufzählendes Verfahren}}$$

$$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad \text{Menge der } \underline{\text{positiven ganzen Zahlen}} \text{ als } \underline{\text{aufzählendes Verfahren}}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ und } b \neq 0 \right\} \quad \dots \text{Menge der } \underline{\text{rationalen Zahlen}}$$

Die Menge der rationalen Zahlen besteht aus allen endlichen und periodischen Dezimalzahlen .(das sind jene Dezimalzahlen, die sich als Bruch darstellen lassen.)

$\frac{56}{57} \in Q$ $99,67 \in Q$ $\frac{7}{99} \in Q$ $\in$ Zeichen für „**Element von**“ ->die Zahl **gehört zu dieser Menge/liegt in dieser** $\in$ gehört dazu.. ...ist eine rationale Zahl (siehe „Sprachkurs“ im Folgenden)

Die größte Menge (siehe Diagramm) ist die Menge der **reellen Zahlen R**. Sie besteht überhaupt aus „allen Zahlen“.

Dies bedeutet sie enthält alle 3 Zahlenmengen N, Z und Q sowie die sogenannten **irrationalen Zahlen I** wie Pi, der Eulerschen Zahl e oder Quadratwurzelzahlen, deren Zahl unter der Wurzel (der Radikand) keine Quadratzahl ist. Also z.B. $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$

Die Menge I besteht aus allen unendlichen nicht periodischen Dezimalzahlen (solche, die nicht als Bruch darstellbar sind) und deren Nachkommastellen nicht abbrechen („aufhören“)

$\sqrt{2} = 1,4142135623\ 7309504880\ 1688724209\ 6980785696\ 7187537694\ 8073176679\ 7379907324\ 7846210703\ 8850387534\ 3276415727...$

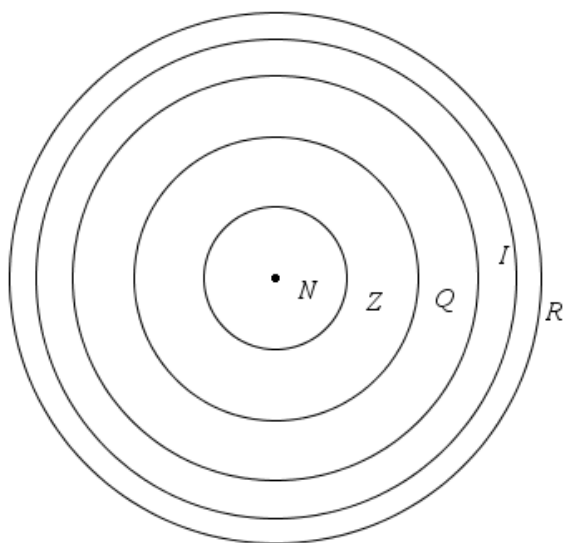
$\sqrt{3} \in I$ $\sqrt{2} \in I$ $\sqrt{2} \in R$ $\sqrt{3} \in R$ $\sqrt{33} \in R$ $\sqrt{33} \in I$ $\pi = 3,141592653589793..... \in R$ $\pi \in I$
 $\sqrt{169} = 13 \notin I!!!!!!$ $\sqrt{169} \in R$

$e = 2,718281828459..... \in R$ $e \in I$ $\sin(34^\circ) \in I$ $\sqrt{\frac{77}{98}} \in I$ $\sqrt{7,9876} \in I$

$3 \cdot \pi \in I$ $3 \cdot \pi \in R$ $\frac{\pi}{3} \in I$ $\frac{\pi}{3} \in R$

$\frac{56}{57} \in R$ $99,67 \in R$ $\frac{56}{57} \in Q$ $99,67 \in Q$

$\in$ Zeichen für „**Element von**“ (wenn etwas „dazugehört“)



Die jeweils kleineren Mengendiagrammkreise sind **Teilmenge** der jeweils größeren.
Die jeweils größeren sind **Obermenge** der jeweils kleineren Mengendiagrammkreise

Die **irrationalen Zahlen I** sind jene Zahlen, die in der Menge der reellen Zahlen liegen, aber nicht Element der Menge der rationalen Zahlen Q sind. Wir können schreiben:

$$I = R \setminus Q \quad (\text{sprich: „R ohne Q“}). \quad \text{Eine reelle Zahl, die nicht rational ist.} \quad I \subseteq R$$

$R = Q \cup I$ Die reellen Zahlen sind die Vereinigungsmenge aus den rationalen und irrationalen Zahlen

Das Symbol für **Teilmenge** ist $\subseteq$ (siehe „Sprachkurs“ Seite 4 bis 9)

Wir stellen fest: $N \subseteq R$ $Q \subseteq R$ $Z \subseteq Q$ also: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

Wir übersetzen **Deutsch-Mathematisch**

Mathematische Symbole

und ein wenig **Mengenlehre**

Ein Sprachkurs für die Reise nach Mathematika



Die Menge der natürlichen Zahlen hat unendlich viele Elemente.
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen (auch ganze und rationale Zahlen)
Das Symbol für „**unendlich**“ lautet:
 ∞ (da in der Republic of Mathematica stets die Sonne scheint, eine Designersonnenbrille!)



Das Zeichen für „**Element von**“ lautet:

$\in$

Beispiel: Wollen wir ausdrücken/aufschreiben, dass 137 eine natürliche Zahl ist, also zur Menge der natürlichen Zahlen gehört, schreiben wir:

$$137 \in N$$

Das Zeichen für „**kein Element von**“ lautet:

$\notin$

Beispiel: Wollen wir ausdrücken/aufschreiben, dass -794 keine natürliche Zahl ist, also zur Menge der ganzen Zahlen gehört, schreiben wir:

$$-794 \notin N \quad -794 \in Z$$

< (echt) kleiner als

$\leq$ **kleiner gleich als**

> (echt) größer als

$\geq$ **größer gleich als**

Wir lesen eine Mengenklammerschreibweise (Darstellung einer Menge) folgendermaßen:
wenn *innerhalb einer Mengenklammer* ein gerader Strich steht:

| „für die gilt“

Beispiel: Die Menge der **negativen ganzen Zahlen** schreiben wir so an:

$Z^- = \{x \in Z \mid x < 0\}$ So eine Schreibweise bezeichnen wir als beschreibendes Verfahren

Wir sprechen:

Alle x aus Z , für die gilt, x ist echt kleiner als Null. oder

Alle (Elemente der) ganzen Zahlen, für die gilt, x ist echt kleiner als Null

Alle (Elemente der) ganzen Zahlen, die echt kleiner als Null sind.

$\exists$ **es existiert** **es existieren**

$\nexists$ **es existiert nicht** **es existieren nicht** **es existiert (gibt)kein....**

Beispiel: Der/die MathematikerIn sagt:

es existieren = es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.

$\exists \infty x \in N$

$\exists \infty$ natürliche Zahlen

meist: $\exists x$, sodass gilt.....

$\nexists x \in Z \quad x < 6$ es gibt keine ganze Zahl die kleiner als 6 ist (wäre)

$\wedge$ **und**

Beispiel: Der/die MathematikerIn sagt

30972 ist eine natürliche Zahl und -3,69 ist eine rationale Zahl.

$30972 \in N \wedge -3,69 \in Q$

$\vee$ **oder** (lateinisch: vel)

Beispiel: Der/die MathematikerIn sagt

im Falle des Bestimmens einer Lösung beim Herausheben eines Faktors von quadratischen Gleichungen in der 5.Klasse

$x(x-4) = 0$

$x = 0 \vee x = 4$ x ist Null oder x ist 4

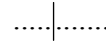
Wir merken uns:

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

$\forall$ **für alle**

Beispiel: $x < 0 \quad \forall x \in Z$ x ist kleiner als Null für alle ganzen Zahlen (gültig)

Das Symbol für „teilt“ ist ein senkrechter gerader Strich.



6 ist Teiler von 36 $6|36$ 6 teilt 36 36 ist durch 6 teilbar $36:6=6$

Das Symbol für „teilt nicht“ ist ein senkrechter durchgestrichener gerader Strich.



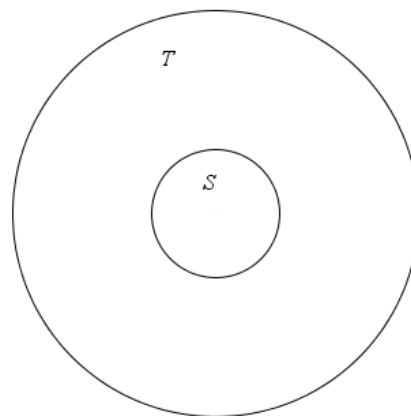
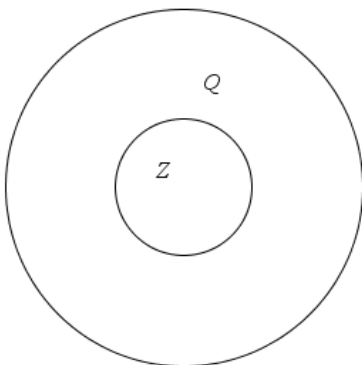
7 ist kein Teiler von 39 $7 \nmid 39$ 7 teilt nicht 39 39 ist nicht durch 7 teilbar

Das Symbol für „nicht“ ist: $\neg$
 $\neg a$ nicht a

Das Symbol für **Teilmenge** ist $\subseteq$

Beispiel: Die Zahlenmenge der ganzen Zahlen ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen

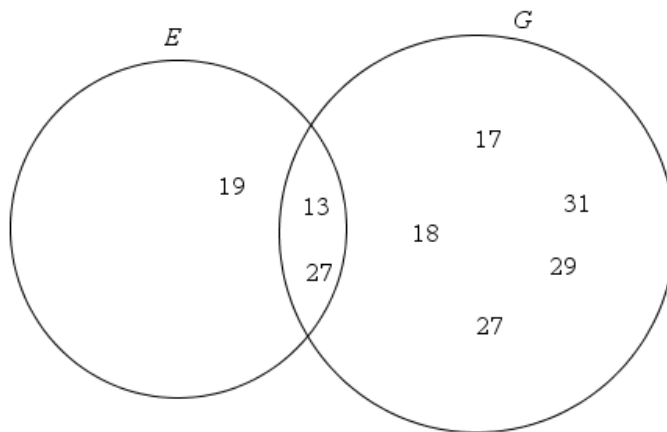
$Z \subseteq Q$ oder $S \subseteq T$ S, T beliebige Mengen



Das Symbol $\subset$ bedeutet **echte Teilmenge**. Im obigen Beispiel: Falls T außer den Elementen von S noch andere Elemente enthält. **Eine unechte Teilmenge** ist wenn $S = T$

$\not\subset$ keine Teilmenge

Bsp: $E = \{13, 19, 27\}$ $G = \{13, 17, 18, 27, 29, 31\}$ $G \not\subset E$ $E \not\subset G$ aber $E \cap G = \{13, 27\}$



Das Symbol für **Obermenge** ist $\supseteq$

Beispiel: Lesen wir die obere Beziehung $Z \subseteq Q$ von rechts nach links, notieren wir:
Die Zahlenmenge der rationalen Zahlen ist eine Obermenge der ganzen Zahlen

$$Z \subseteq Q \quad Q \supseteq Z$$

Das Symbol für „**Vereinigung**“ ist $\cup$

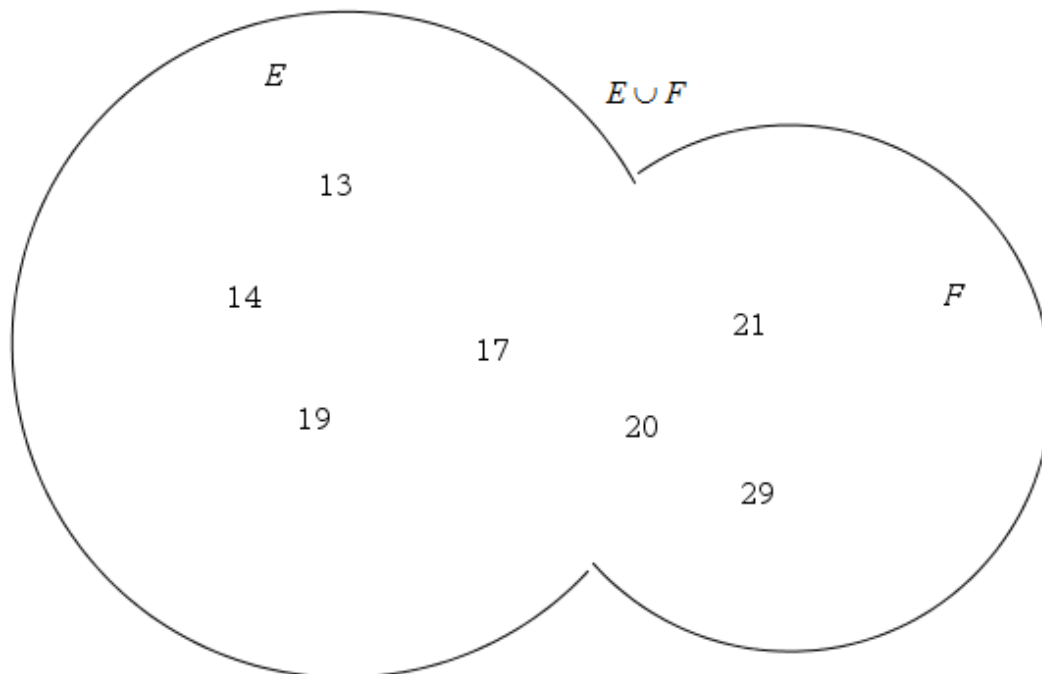
Beispiel.: $E = \{13, 14, 17, 19\}$ $F = \{20, 21, 29\}$

$$E \cup F = \{13, 14, 17, 19\} \cup \{20, 21, 29\} = \{13, 14, 17, 19, 20, 21, 29\}$$

Alle Elemente, die entweder in der 1.Menge oder in der 2.Menge oder in beiden enthalten sind.

Vereinigungsmenge „alle Elemente zusammen“ und jene Elemente, die doppelt vorkommen, werden nur einmal gezählt

$$E \cup F = \{13, 14, 17, 19\} \cup \{20, 21, 29\} = \{13, 14, 17, 19, 20, 21, 29\}$$



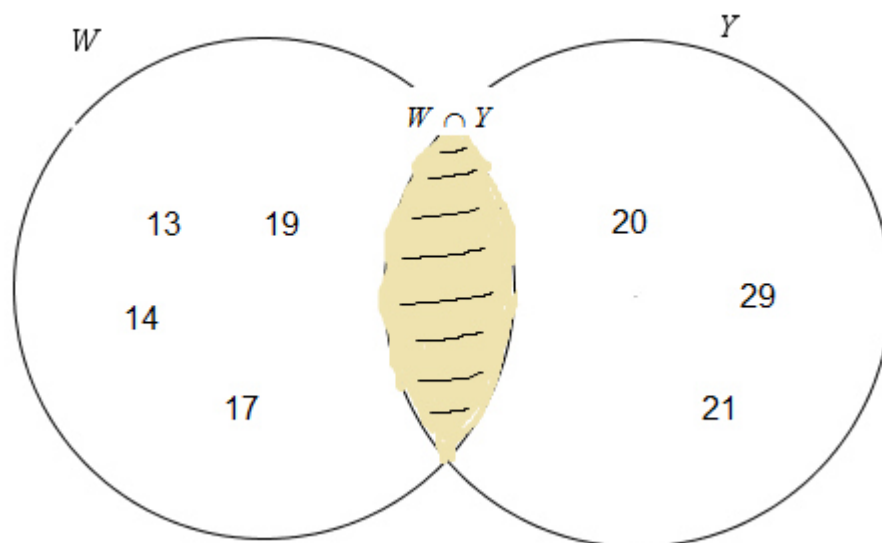
Das Symbol für „**Durchschnitt**“ ist $\cap$

Beispiel: $W = \{13, 14, 17, 19\}$ $Y = \{20, 21, 29\}$

$$W \cap Y = \{13, 14, 17, 19\} \cap \{20, 21, 29\} = \{\}$$

leere Menge

Die Durchschnittsmenge ist leer, es gibt kein einziges Element, das in beiden Mengen liegt.

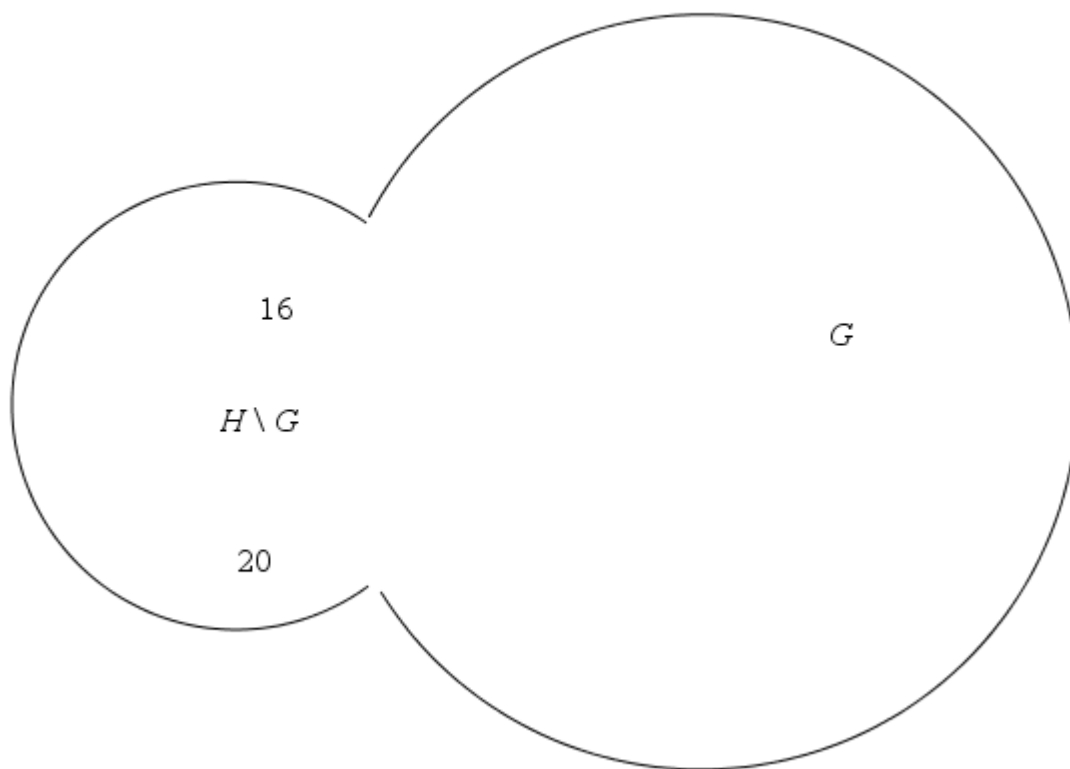


Die **Differenzmenge** zum Beispiel der beiden Mengen G und H ist **$H \setminus G$** (sprich: H ohne G)

$$H \setminus G = \{x | (x \in H) \wedge (x \notin G)\}$$

Menge aller x, also Elemente, die zu H, aber nicht zu G gehören

Bsp: $H = \{11, 14, 15, 16, 20\}$ $G = \{x \in \mathbb{N} | x < 16\}$ **$H \setminus G = \{16, 20\}$**



$\Rightarrow$ Implikationszeichen: **wenn** **dann folgt**
daraus folgt

Beispiel: $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ wenn ein Element in der Menge der rationalen Zahlen liegt, liegt es ja auch in der Menge der reellen Zahlen, weil $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ ist Teilmenge von $\mathbb{R}$!

auch in die andere Richtung $\Leftarrow$ wenn wir die Beziehung umdrehen (von rechts nach links lesen)

Beispiel: $x \in \mathbb{R} \Leftarrow x \in \mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow$ Äquivalenzzeichen : **genau dann-wenn..... folgt.. und umgekehrt**

Beispiel: $y \in E \Leftrightarrow x \in D$ E,D.... beliebige Mengen. Wenn ein Element in der ersten Menge liegt ,liegt es auch in der 2.Menge und umgekehrt

Aussagen

Kurzkurs

Bemerkung: Für einige Übungen wirst du **eventuell Kenntnisse über ganze und rationale Zahlen** benötigen, also die **Übungsleuchttürme 001 bis 003** und **009-1 und 009** aus der **3.Klasse**.

Trifft etwas in der Mathematik zu, also ist eine Aussage richtig, so sprechen wir von einer wahren Aussage **w.A.**

Beispiel:

Beim Lösen einer Gleichung in 1 Variablen haben wir am Ende die Aussage

$$3x + 13 = 3x + 13 \Rightarrow (\text{daraus folgt}) \quad 0 = 0 \quad \text{w.A.} \quad \text{oder}$$

beim Betrachten von Mengenelementen stellen wir fest:

$$7 \in \mathbb{Q} \quad \text{w.A.}$$



Trifft etwas in der Mathematik nicht zu, also ist eine Aussage falsch, so sprechen wir von einer falschen Aussage **f.A.**

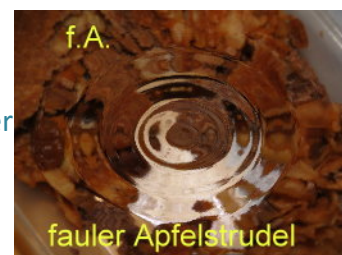
Beispiel:

Beim Lösen einer Gleichung haben wir am Ende die Aussage

$$3x + 19 = 3x + 13 \Rightarrow (\text{daraus folgt}) \quad 19 = 13 \Rightarrow 0 = -6 \quad \text{f.A.} \quad \text{oder}$$

beim Betrachten von Mengenelementen stellen wir fest:

$$-7 \in \mathbb{N} \quad \text{f.A.}$$



Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel 5.Kl.,Übergangsklasse ; 3. & 4.Kl.

Nr. 002

zu Übungsleuchtturm

007 008

Lineare Gleichungen

Begriffe

Grundmenge G einer linearen Gleichung

ist definiert als die Menge jener Zahlen, die zur Belegung der Variablen zugelassen sind.

Definitionsmenge D einer linearen Gleichung

ist definiert als die Menge jener Zahlen der Grundmenge, für welche die auftretenden Terme definiert sind.

$$L \subseteq D \subseteq G \quad \text{Teilmengen}$$

Lösen einer linearen Gleichung

bedeutet die Lösungsmenge zu finden /ermitteln.

Äquivalenzumformung: auf der linken **und** rechten Seite der Gleichung **dieselbe** Rechenoperation mit einem Term durchführen. (Term=auch Zahl „alleine“!!)

Lösungsfälle linearer Gleichungen:

Formel der linearen Gleichung

$$a \cdot x + b = 0$$

wenn $a \neq 0$

$$x = -\frac{b}{a} \quad x = c \Rightarrow L = \{c\} \quad c \in R \quad \text{es existiert eine **eindeutige Lösung**}$$

wenn $a = 0$

1.Sonderfall

$$5000x - 343 = 5000x - 343 \quad 0 = 0 \quad w.A. \quad L = R \quad L = G$$

2.Sonderfall

$$z.B. \quad -\frac{2}{7} = -\frac{11}{12} \quad f.A. \quad L = \{ \}$$

$$-80x - 22 = -80x - 8 \rightarrow -22 = -8 \rightarrow f.A. \quad L = \{ \}$$

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel 5.Kl.,Übergangsklasse ; 3. & 4.Kl.

Nr. 003

zu Übungsleuchtturm

009

Lineare Gleichungssysteme

In der SchülerInnensprache ausgedrückt

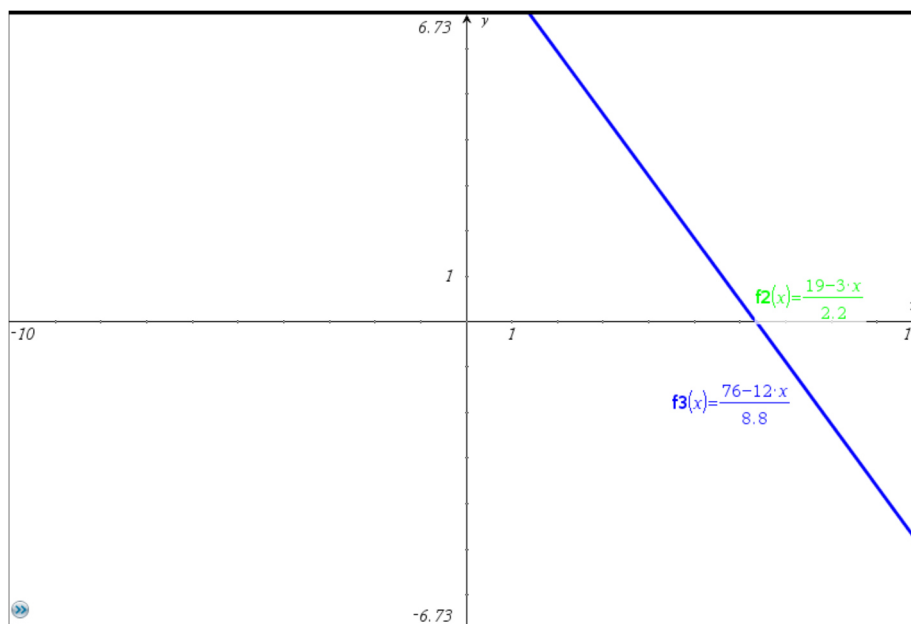
2 lineare Gleichungen $y = kx + d$

sind

1.) identisch

Wenn die eine Gleichung ein vollkommen Vielfaches der anderen ist z.B.

$$\left\{ \begin{array}{l} I \quad 3x + 2.2y = 19 \\ II \quad 12x + 8.8y = 76 \end{array} \right\} \rightarrow II = I \cdot 4$$



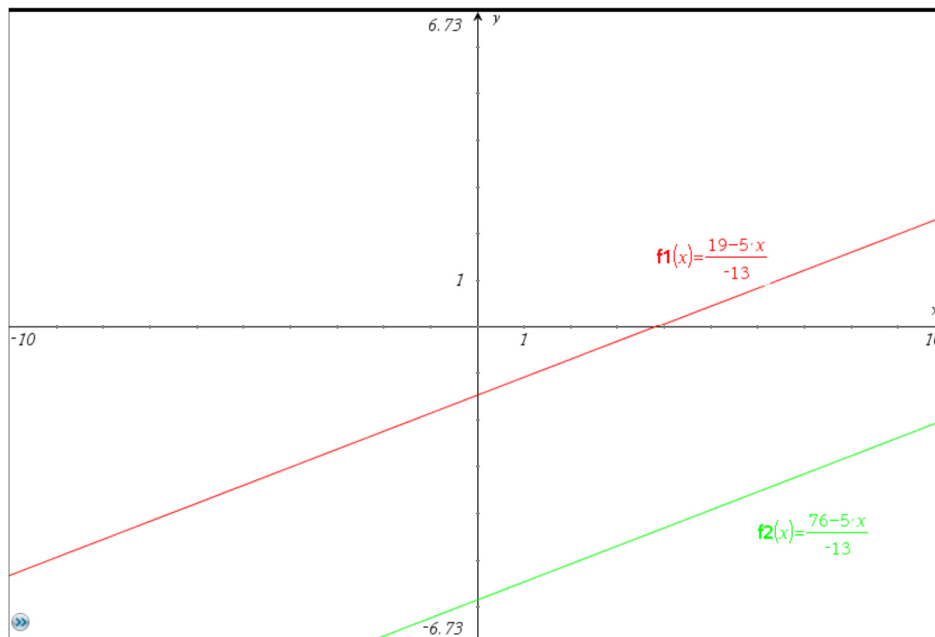
Sind

2.) zueinander parallel

wenn die Zahl rechts des „=“ der einen Gleichung zwar ein Vielfaches der 2.Gleichung ist aber die linke Seite total gleich ist

z.B.

$$\begin{cases} I & 5x - 13y = 19 \\ II & 5x - 13y = 76 \end{cases}$$



Das sind die beiden Sonderfälle

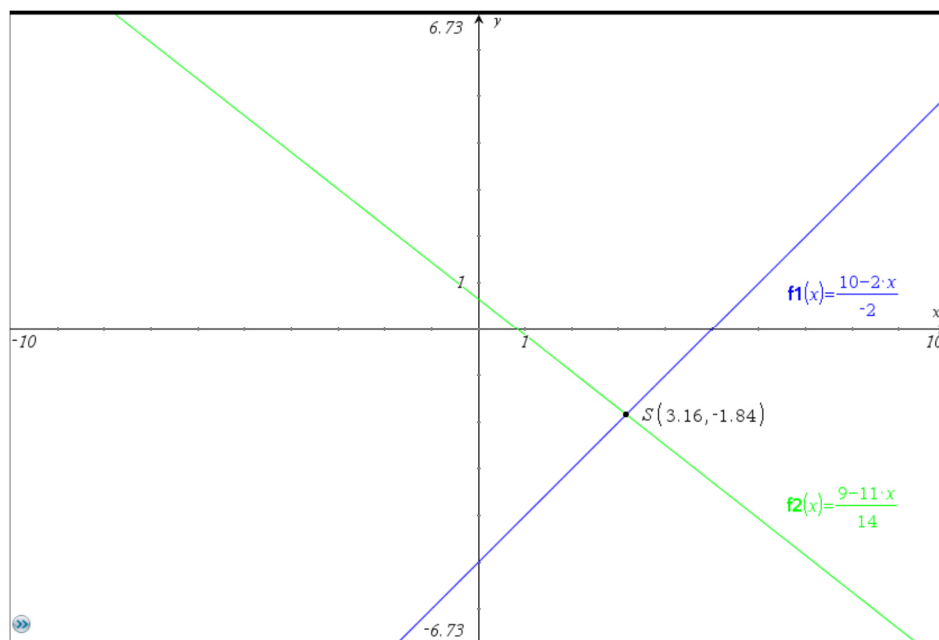
3.)

Normalfall:**Es gibt einen Schnittpunkt S**

1.) und 2.) von oben treffen nicht zu

z.B.

$$\begin{cases} I & 11x + 14y = 9 \\ II & 2x - 2y = 10 \end{cases} \quad L = \{(3.16, -1.84)\}$$



Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel 5.Kl.,Übergangsklasse ; 3. & 4.Kl.

Nr. 004

zu Übungsleuchtturm

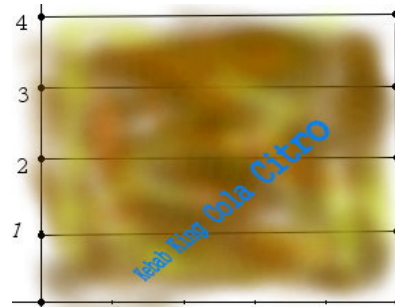
010

Mischungsaufgaben

Anwendung linearer Gleichungssysteme in 2 Variablen

Mischungsaufgaben

Ü1



Mischen wir 13 Liter eines Kebab-King-Power-Colas mit 17 Liter einer anderen Colasorte, so erhalten wir 80 prozentiges Cola, mischen wir 17 Liter der ersten Sorte mit 13 Liter der zweiten, so erhalten wir 76 prozentiges Cola.

Berechne, wieviel Prozent Energygehalt (Powercola) jede der beiden Sorten enthält!

	Menge(l)	Power%	Power l	Menge (l)	Power %	Power l
1.Sorte	13	x	$\frac{x}{100} \cdot 13$	17	x	$\frac{x}{100} \cdot 17$
2.Sorte	17	y	$\frac{y}{100} \cdot 17$	13	y	$\frac{y}{100} \cdot 13$
Mischung	30	80	$\frac{80}{100} \cdot 30$	30	76	$\frac{76}{100} \cdot 30$

Wir setzen also an Hand der Überlegungen in der Tabelle das Gleichungssystem

$$I \quad \frac{x}{100} \cdot 13 + \frac{y}{100} \cdot 17 = \frac{80}{100} \cdot 30$$

$$II \quad \frac{x}{100} \cdot 17 + \frac{y}{100} \cdot 13 = \frac{76}{100} \cdot 30 \quad \text{an.}$$

Durch Kürzen und Vereinfachen (Multiplizieren der beiden Gleichungen mit 100!) erhalten wir schließlich das lineare Gleichungssystem

$$I \quad 13x + 17y = 2400$$

$$II \quad 17x + 13y = 2280$$

das wir am besten mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen und als Lösung das geordnete Zahlenpaar $L = \{(63;93)\}$ erhalten.

Dies bedeutet, die erste Sorte Cola enthält 63 %-igen Powergehalt, die 2.Sorte 93%-igen.

Ü2

Aus 100 Liter eines 76 prozentigen „Alcool „ und einem 66 prozentigen soll 74 prozentiger Alcool hergestellt werden.

Wieviel Liter des 66 prozentigen Alcools muss man verwenden und wieviel 74 prozentigen erhält man???

	Menge in Liter	reine Alcoolmenge (in l)	
1.Sorte 76 %	100	$0,76 \cdot 100 = 76$	
2.Sorte 66 %	x	$0,66x$	
Mischung 74 %	y	$0,74y$	

Wir setzen also an Hand der Überlegungen in der Tabelle das Gleichungssystem

$$I \quad 100 + x = y$$

$$II \quad 76 + 0,66x = 0,74y \quad \text{an.}$$

Da das y bereits (nahezu) ausgedrückt steht, wenden wir am optimalsten das Gleichsetzungsverfahren an!

$$I \quad 100 + x = y$$

$$II \quad y = \frac{76}{0,74} + \frac{0,66}{0,74}x$$

Wir rechnen mit den vollständigen Brüchen wegen der Genauigkeit

$$100 + x = \frac{76}{0,74} + \frac{0,66}{0,74}x$$

Als Lösung erhalten wir das geordnete Zahlenpaar $L = \{(25; 125)\}$.

Man muss 25 Liter 66 prozentigen Alcool verwenden und man erhält 125 Liter 74 prozentigen Alcool.



Anwendung linearer Gleichungssysteme in 2 Variablen

Mischungsaufgaben

Stelle eine genaue Tabelle auf. Löse das Gleichungssystem durch Umformen und wende ein dir „sympathisches“ Lösungsverfahren an!!!

Ü1

Mischen wir 9 Liter eines Kebab-King-Power-Colas mit 14 Liter einer anderen Colasorte, so erhalten wir 83 prozentiges Cola, mischen wir 14 Liter der ersten Sorte mit 9 Liter der zweiten, so erhalten wir 78 prozentiges Cola.

Berechne, wieviel Prozent Energygehalt (Powercola) jede der beiden Sorten enthält!

Ü2

Aus 55 Liter eines 88 prozentigen „Alcool „ und einem 14 prozentigen soll 24 prozentiger Alcool hergestellt werden.

Wieviel Liter des 14 prozentigen Alcools muss man verwenden und wieviel 24 prozentigen erhält man???

Anwendung linearer Gleichungssysteme in 2 Variablen

Mischungsaufgaben

Lösungsaufarbeitung

Ü1

Mischen wir 9 Liter eines Kebab-King-Power-Colas mit 14 Liter einer anderen Colasorte, so erhalten wir 83 prozentiges Cola, mischen wir 14 Liter der ersten Sorte mit 9 Liter der zweiten, so erhalten wir 78 prozentiges Cola.

Berechne, wieviel Prozent Energygehalt (Powercola) jede der beiden Sorten enthält!

	Menge(l)	Power%	Power l	Menge (l)	Power %	Power l
1.Sorte	9	x	$\frac{x}{100} \cdot 9$	14	x	$\frac{x}{100} \cdot 14$
2.Sorte	14	y	$\frac{y}{100} \cdot 14$	9	y	$\frac{y}{100} \cdot 9$
Mischung	23	83	$\frac{83}{100} \cdot 23$	23	78	$\frac{78}{100} \cdot 23$

Wir setzen also an Hand der Überlegungen in der Tabelle das Gleichungssystem

$$I \quad \frac{x}{100} \cdot 9 + \frac{y}{100} \cdot 14 = \frac{83}{100} \cdot 23$$

$$II \quad \frac{x}{100} \cdot 14 + \frac{y}{100} \cdot 9 = \frac{78}{100} \cdot 23 \quad \text{an.}$$

Durch Kürzen und Vereinfachen (Multiplizieren der beiden Gleichungen mit 100!) erhalten wir schließlich das lineare Gleichungssystem

$$I \quad 9x + 14y = 1909$$

$$II \quad 14x + 9y = 1794$$

das wir am besten mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen und als Lösung das geordnete Zahlenpaar $L = \{(69; 92)\}$ erhalten.

Dies bedeutet, die erste Sorte Cola enthält 69 %-igen Powergehalt, die 2.Sorte 92%-igen.

Ü2

Aus 55 Liter eines 88 prozentigen „Alcool „ und einem 14 prozentigen soll 24 prozentiger Alcool hergestellt werden.

Wieviel Liter des 14 prozentigen Alcools muss man verwenden und wieviel 24 prozentigen erhält man???

	Menge in Liter	reine Alcoolmenge (in l)	
1.Sorte 88 %	55	$0,88 \cdot 55 = 48.4$	
2.Sorte 14 %	x	$0,14x$	
Mischung 24%	y	$0,24y$	

Wir setzen also an Hand der Überlegungen in der Tabelle das Gleichungssystem

$$I \quad 55 + x = y$$

$$II \quad 48.4 + 0,14x = 0,24y \quad \text{an.}$$

Da das y bereits (nahezu) ausgedrückt steht, wenden wir am optimalsten das Gleichsetzungsverfahren an!

$$I \quad 55 + x = y$$

$$II \quad y = \frac{48.4}{0,24} + \frac{0,14}{0,24}x$$

Wir rechnen mit den vollständigen Brüchen wegen der Genauigkeit

$$55 + x = \frac{48.4}{0,24} + \frac{0,14}{0,24}x$$

Als Lösung erhalten wir das geordnete Zahlenpaar $L = \{(352; 407)\}$.

Man muss 352 Liter 14 prozentigen Alcool verwenden und man erhält 407 Liter 24 prozentigen Alcool.

Wissensleuchtturm

= **Wissenskapitel** 5.Kl., (Übergangsklasse & 4.Kl.).

Nr. 005

zu **Übungsleuchtturm**

011

012

013

014

Quadratische Gleichungen

Theorie und Musterbeispiele

Keine primär notwendige Anwendung der großen oder kleinen Lösungsformel

Wir starten von $ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

Fall 1: $b=0$

$$ax^2 + c = 0 \quad a, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

Solche Gleichungen löst du am besten

1.) durch „Hinüberbringen des konstanten Gliedes“ (der Zahl, die alleine steht), entweder durch die Äquivalenzumformung – oder + (und dann noch Dividieren durch die Zahl vor dem x Quadrat, dass dieses alleine steht. Dann wird die Wurzel gezogen mit plus/minus

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\dots\dots}$$

ACHTUNG

Achtung! Eine quadratische Gleichung (die in $\mathbb{R}$ lösbar ist) hat immer 2 Lösungen!!!

Musterbeispiel: Löse $9x^2 - \frac{2}{3} = 0$

$$9x^2 - \frac{2}{3} = 0 \quad \left| + \frac{2}{3} \right.$$

$$9x^2 = \frac{2}{3} \quad | : 9$$

$$x^2 = \frac{\frac{2}{3}}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27} \quad x_1 = +\sqrt{\frac{2}{27}} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{27}} \quad \text{oder} \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{27}}$$

oder

2.) durch Zerfällen nach der 3.binomischen Formel

Musterbeispiel1

Löse $9x^2 - 19 = 0$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)} \quad \text{3.Bifo}$$

$$9x^2 - 19 = (3x - \sqrt{19}) \cdot (3x + \sqrt{19}) = 0$$

Nach dem **Produkt-Null-satz** gilt:

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

$$3x - \sqrt{19} = 0 \quad \vee \quad 3x + \sqrt{19} = 0$$

$$3x = \sqrt{19} \quad \vee \quad 3x = -\sqrt{19}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{19}}{3} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{19}}{3} \quad x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$$

Beachte: Gleichungen der Form „(Zahl mal) x^2 plus Zahl (auch Kommazahl, Bruch)“ sind nicht lösbar.

Leicht einsehbare Begründung: $a^2 + b^2$ ist keine binomische Formel und deshalb zerfällt der Ausdruck nicht in 2 Klammern

oder Bringen wir die Zahl auf die rechte Seite, haben wir $x^2 = \text{minusZahl}$

und es gibt ja keine Zahl, deren Quadrat negativ ist!!!!

denn Minus entsteht nicht durch Multiplikation zweier gleicher Vorzeichen

also minus mal minus oder plus mal plus (was ja Quadrat bedeutet...Zahl /VZ mal sich selbst)

denn minus mal plus ist minus oder plus mal minus ist minus ...kein doppeltes Vorzeichen!!!



$$ax^2 + bx = 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

Solche Gleichungen löst du am besten

durch Herausheben und Anwendung des Produkt-Null-Satzes

(x ist stets heraushebbar)

Musterbeispiel 3:

$$7x^2 - 98x = 0$$

$7x \cdot (x - 14) = 0$ Herausheben „jene Zahl und/oder Variable, die **gemeinsam in beiden** Gliedern vorkommt(en)“

$7x = 0 \quad \vee \quad (x - 14) = 0$ Anwendung des Produkt-Null-Satzes (siehe Musterbsp.2)

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 14$$

Vergiss nicht die Lösungsmenge anzuschreiben!!! $L = \{0; 14\}$ geordnet der Größe nach

Die Lösungsformeln ausgeführt

1.) **kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen**

Die Gleichung $x^2 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$ lösen wir mit der

kleinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Diese lautet

$$x^2 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Steht kein Koeffizient vor dem x quadrat, (wir denken uns 1 mal x^2), wird diese Formel, die **kleine Lösungsformel**, primär verwendet.

q negativ

Ü Löse $x^2 + 11x - 30,25 = 0$

$$1.) \quad p = +11 \quad q = -30,25 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - (-30,25)}$$

Achte auf die Mitnahme des Vorzeichens !!!!!!!

Hier ist der Koeffizient p (Zahl vor dem x) positiv = plus!!!!!!,

und q (die Zahl „alleine“) negativ. Achte auf das Minus!!!!

wenn q negativ, bedeutet $-q$ in der Formel $-(-30,25)$ =nach Crash regel

-> +30,25!!!!

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - (-30,25)} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} + 30,25}$$

Du kannst die Zahl in der Klammer im TR ausrechnen oder nach den Bruchpotenzier-regeln (siehe M Leuchtturm 3.&4.&UE klasse !!) Zähler und Nenner quadrieren und dann ausrechnen

Die Diskriminante ist positiv. Es gibt 2 eindeutige Lösungen!

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{60,5} = -5,5 \pm 7,77817$$

$$x_1 = -5,5 + 7,77817 = 2,27817 \quad 1.Lösung$$

$$x_2 = -5,5 - 7,77817 = -13,27817 \quad 2.Lösung$$

Bemerkung $x^2 + 11x - 30,25 = 0$

rechnest du mit der **großen Formel (nächste Seite)** Setze

a=1 !!!!!

$$a = 1 \quad b = +11 \quad c = -30,25 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-(+11) \pm \sqrt{(+11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30,25)}}{2 \cdot 1} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - (-121)}}{2} = \text{beachte: die Klammer wird zu plus aufgelöst!!!!} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{242}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{242}}{2} = 2,27817$$

$$x_2 = \frac{-11 - \sqrt{242}}{2} = -13,27817$$

2.) **große Lösungsformel**

Falls ein *anderer Koeffizient als 1* sich vor dem x^2 befindet, $a \neq 1$, schreiben wir:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und wir wenden die}$$

große Lösungsformel an.

Bsp 1

$$3x^2 - 99x - 17 = 0$$

Achte auf die Mitnahme des Vorzeichens !!!!!!!

Hier ist der Koeffizient a (Zahl vor dem x^2) positiv = plus!!!!!!,

b aber negativ (Zahl vor dem x) und c (die Zahl „alleine“) auch negativ. Achte auf das Minus!!!!

wenn b negativ, bedeutet $-b$ in der Formel $-(-99)$ = nach Crash regel

-> +99 !!!!

$$a = 3 \quad b = -99 \quad c = -17 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-99) \pm \sqrt{(-99)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-17)}}{2 \cdot 3} = \frac{+99 \pm \sqrt{9801 - (12 \cdot (-17))}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{+99 \pm \sqrt{9801 - (-204)}}{6} = \text{beachte: die Klammer wird zu plus aufgelöst!!!!} =$$

$$x_{1,2} = \frac{+99 \pm \sqrt{9801 + 204}}{6} = \frac{+99 \pm \sqrt{10005}}{6}$$

$$x_1 = \frac{+99 + \sqrt{10005}}{6} = x_1 = \frac{+99 + 100,025}{6} = 33,1708328 \quad 1. \text{Lösung}$$

$$x_2 = \frac{+99 - \sqrt{10005}}{6} = \frac{+99 - 100,025}{6} = -0,1708328 \quad 2. \text{Lösung}$$

$$x = -0.17083281263$$

$$x = 33.170832812631$$

Die Diskriminante ist positiv. Es gibt 2 eindeutige Lösungen!

Bemerkung:

würdest du mit der kleinen Lösungsformel rechnen, musst du zuerst die Gleichung durch 3 dividieren!

$$3x^2 - \frac{99}{3}x - \frac{17}{3} = 0$$

Du hast dann Brüche oder Kommazahlen. Mit dem TR nicht so arg....

Die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen musst du gut auswendig lernen!- erfahrungsgemäß merken sich die SchülerInnen diese schnell.

Bsp 2

Löse

$$13x^2 + 12x + 11 = 0$$

Achte auf die Mitnahme des Vorzeichens !!!!!!!**Hier sind alle Koeffizienten (Zahlen vor dem x^2 , x und die alleine stehende Zahl) positiv = plus!!!!!!**

$$a = 13 \quad b = +12 \quad c = +11 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 13 \cdot 11}}{2 \cdot 13} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 572}}{26}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel, die Diskriminante ist kleiner null.Es gibt keine Lösung in den reellen Zahlen !(nur in der Menge der komplexen Zahlen –siehe 7.Klasse !)beachte dazu:Lösungsfälle nach Art der DiskriminanteÜbungsleuchtturm Nr.013 Beispiel 5 Lösung auf Seite 7**Diskriminante D = Ausdruck unter der Wurzel in der quadratischen Lösungsformel**1.) $D > 0 \Rightarrow \exists$ 2 eindeutige Lösungen in den reellen Zahlen2.) $D < 0 \Rightarrow \exists$ keine Lösung in R Ausdruck unter der Wurzel ist negativ

Die beiden Lösungen sind keine Elemente aus den reellen Zahlen, sie wären eine komplexe Zahl.

3.) $D = 0 \quad b^2 = 4ac \Rightarrow \exists$ Doppelösung in R der eine resultierende Wert wird doppelt gezählt, z.B. $L = \{-3^{(2)}\}$ wenn $x_{1,2} = -3$. Die Wurzel ergibt gezogen Null.

Wissensleuchtturm

= **Wissenskapitel** 5.Kl.,Übergangsklasse ; 3. & 4.Kl.

Nr. 006

zu **Übungsleuchtturm**

016

Quadratische Funktionen

Wann ist eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$ *nach oben bzw. nach unten geöffnet???*

Ist dies auch von b abhängig???

Eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$ ist *nach oben geöffnet, wenn*
 $a > 0$

Eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$ ist *nach unten geöffnet, wenn*
 $a < 0$
 b spielt keine Rolle.

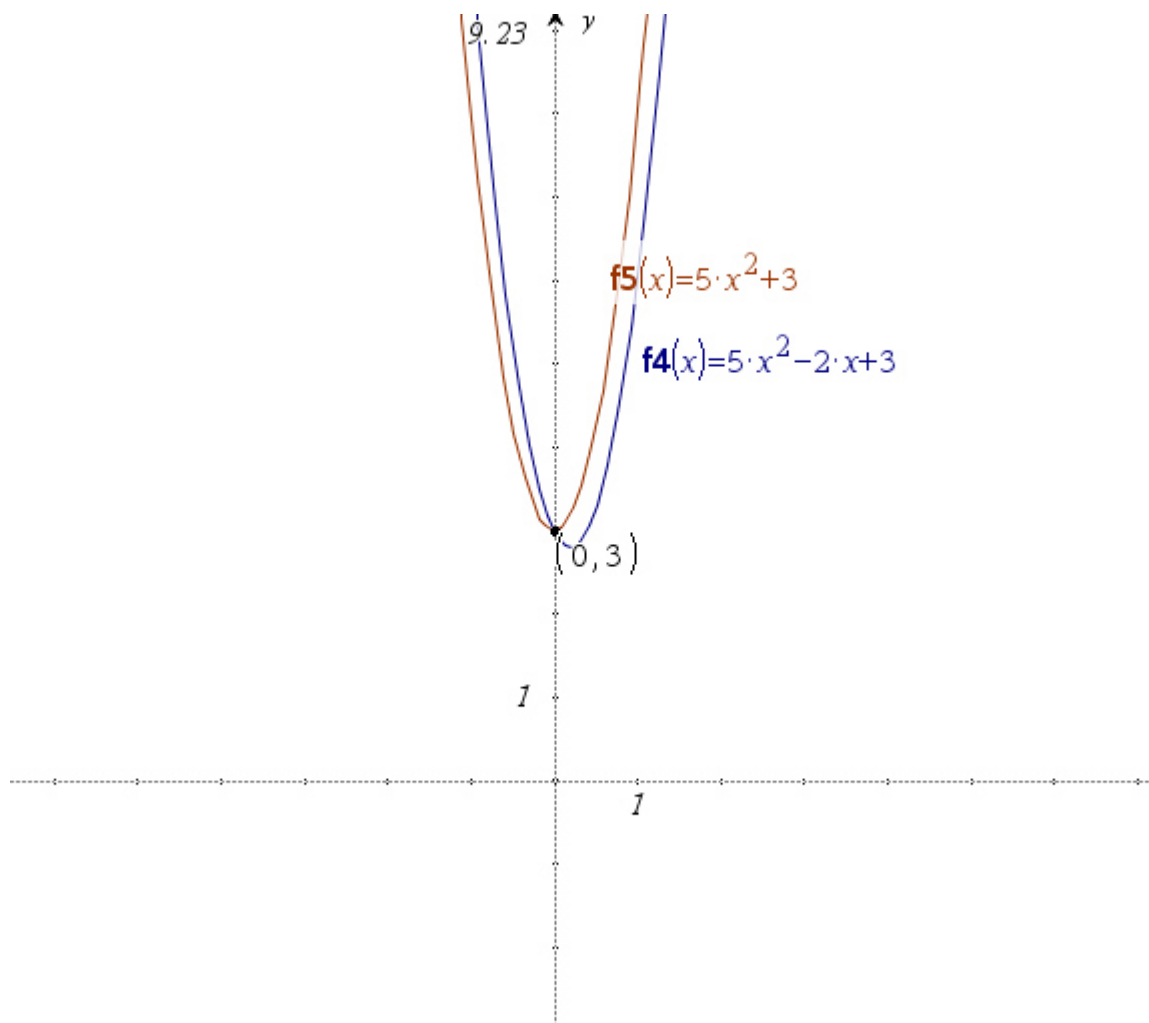
Wie unterscheiden sich die beiden Parabeln $y = f(x) = 5x^2 + 3$

und

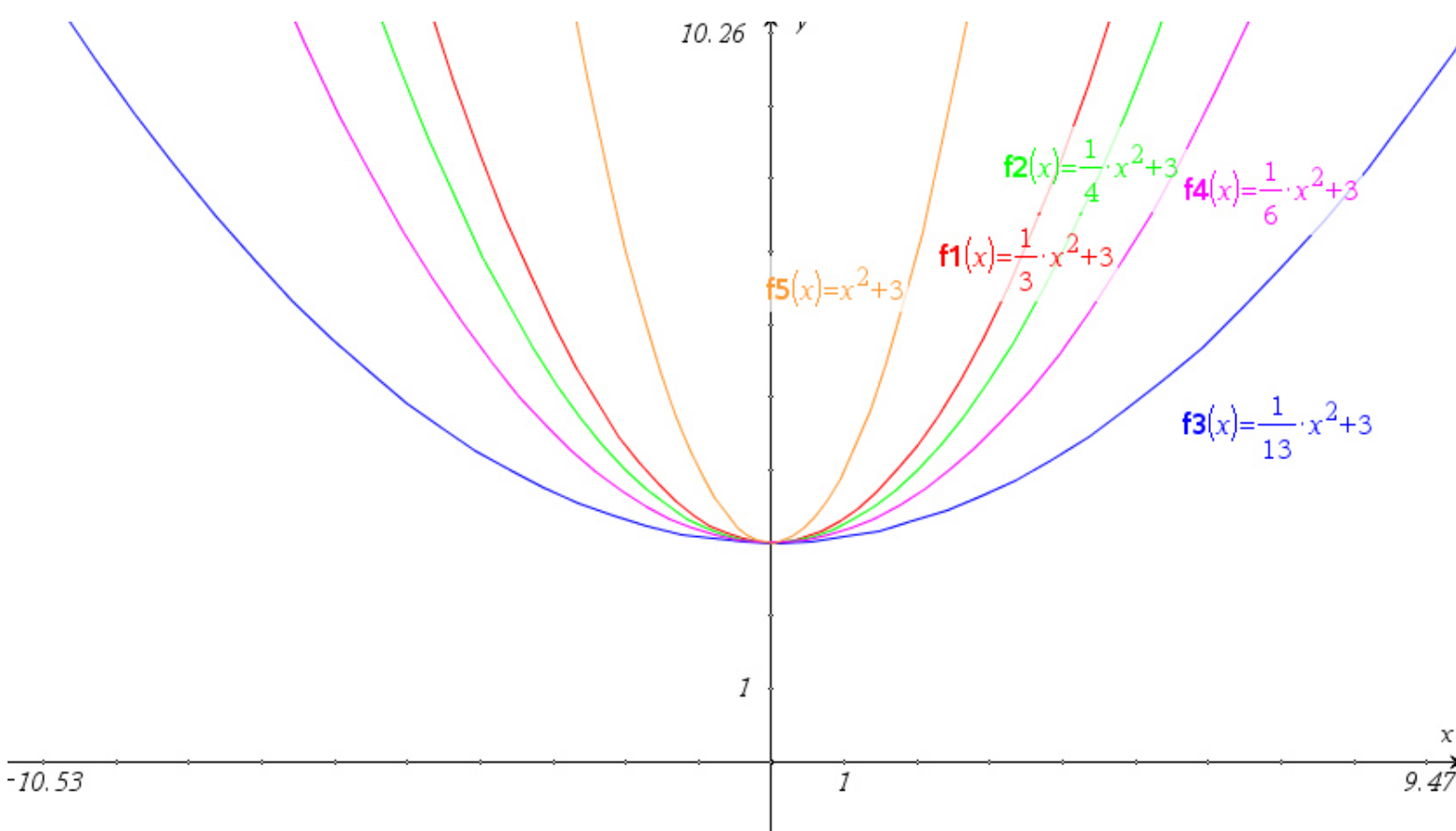
$y = f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ in ihrer Lage im Koordinatensystem zueinander ?

$y = f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ ist von der y-Achse bezüglich des Tiefpunktes

$T(0/3)$ von $y = f(x) = 5x^2 + 3$ weg „hinüber verschoben“, in den 1. Quadranten verschoben
 ,beide Kurven sind gleich weit geöffnet. „Übereinandergelegt“ sind sie deckungsgleich



Funktionsbetrachtung quadratischer Funktionen –Fall 1



Zuordnung der Funktionsgleichungen- siehe Grafik!

Im Tiefpunkt $T(0/3)$ schneiden die Grafen die y-Achse.

Nullstellen existieren keine, Lösungen der quadratischen Gleichung sind nicht reell!

z.B.

$$x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = -3$$

oder

$$\frac{1}{6}x^2 + 3 = 0 \mid \cdot 3 \rightarrow x^2 + 18 = 0 \rightarrow x^2 = -18$$

Anhand der Grafik sehen wir auch, dass die Grafen die x-Achse nicht schneiden.

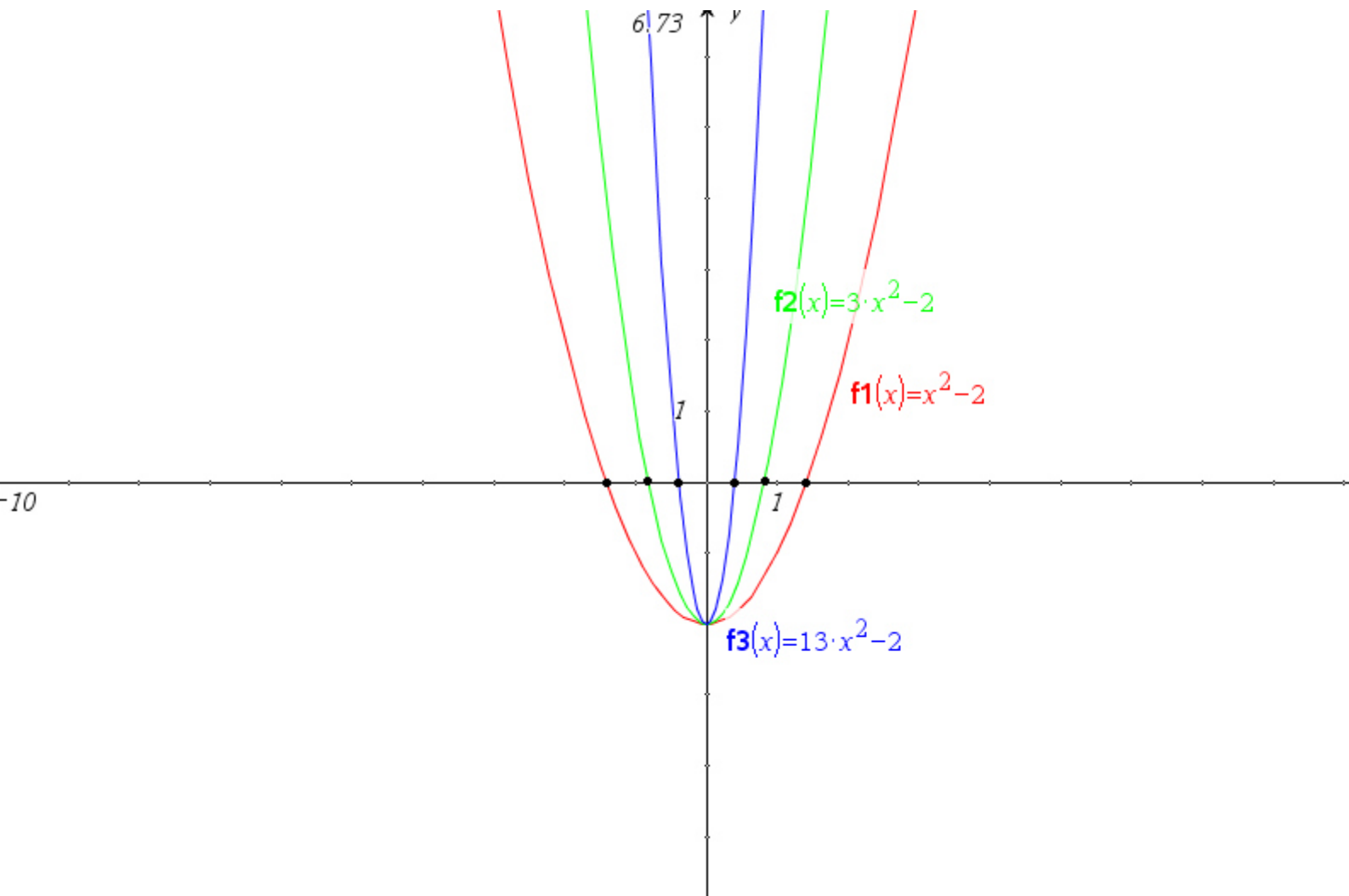
Betrachten wir allgemein $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$,

können wir interpretierend über den Koeffizienten a und den konstanten Faktor b sagen:

Je größer $a > 0$ wird und je kleiner $a < 0$ bei fixem b wird, desto enger wird die Öffnung der Parabel.

Je kleiner $a > 0$ wird und je größer $a < 0$ bei fixem b wird, desto weiter wird die Öffnung der Parabel.

Funktionsbetrachtung quadratischer Funktionen –Fall 2



Zuordnung der Funktionsgleichungen- siehe Grafik!

Im Tiefpunkt $T(0/-2)$ schneiden die Grafen die y-Achse.

$$y = f_1(x) = x^2 - 2$$

$$\text{Nullstellen: } N_1(-1,41/0) \quad N_2(1,41/0)$$

$$y = f_2(x) = 3x^2 - 2$$

$$\text{Nullstellen: } N_1(-0,816/0) \quad N_2(0,816/0)$$

$$y = f_3(x) = 13x^2 - 2$$

$$\text{Nullstellen: } N_1(-0,392/0) \quad N_2(0,392/0)$$

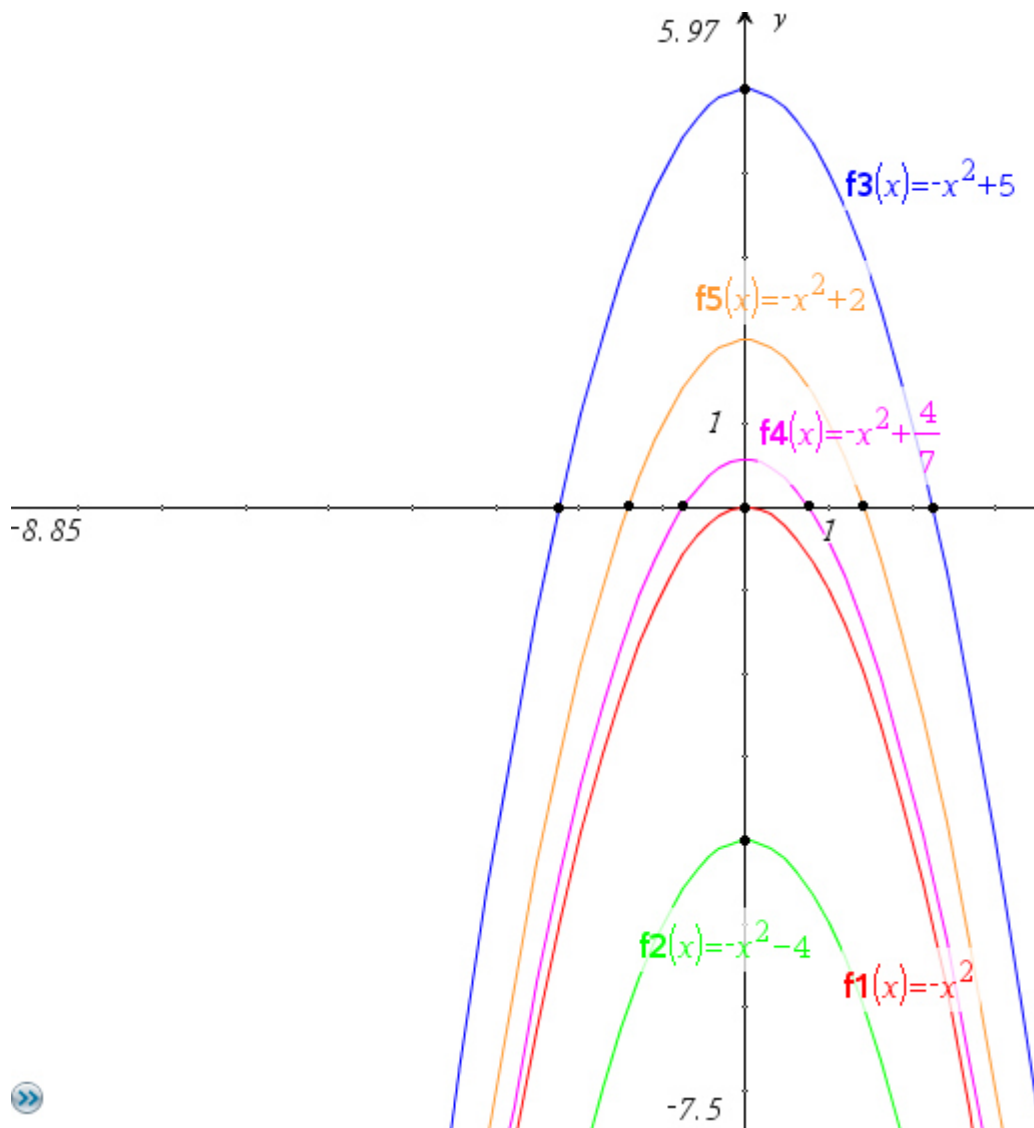
Betrachten wir allgemein $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$,

können wir interpretierend über den Koeffizienten a und den konstanten Faktor b sagen:

Je größer $a > 0$ wird und je kleiner $a < 0$ bei fixem b wird, desto enger wird die Öffnung der Parabel.

Je kleiner $a > 0$ wird und je größer $a < 0$ bei fixem b wird, desto weiter wird die Öffnung der Parabel.

Funktionsbetrachtung quadratischer Funktionen –Fall 3



Zuordnung der Funktionsgleichungen- siehe Grafik!

$$y = f_1(x) = -x^2$$

Nullstelle: $N(0/0)$ = Hochpunkt

$$y = f_2(x) = -x^2 - 4$$

Nullstellen existieren keine, Lösungen der quadratischen Gleichung sind nicht reell!

$$y = f_2(x) = -x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4$$

Anhand der Grafik sehen wir, dass der Graf die x-Achse nicht schneidet

$H(0/-4)$ Hochpunkt

$$y = f_3(x) = -x^2 + 5$$

Nullstellen: $N_1(-2,24/0)$ $N_2(2,24/0)$

$H(0/5)$ Hochpunkt

$$y = f_4(x) = -x^2 + \frac{4}{7}$$

Nullstellen: $N_1(-0,756/0)$ $N_2(0,756/0)$

$H\left(0/\frac{4}{7}\right)$ Hochpunkt

$$y = f_5(x) = -x^2 + 2$$

Nullstellen: $N_1(-1,41/0)$ $N_2(1,41/0)$

$H(0/2)$ Hochpunkt

Die Funktionsgraphen unterscheiden sich in ihrer Lage zueinander durch eine *Verschiebung auf der y-Achse*, sie sind *beide gleich weit nach unten geöffnet*, da $a < 0$

in $y = f(x) = ax^2 + b$

„Übereinandergelegt“ sind sie deckungsgleich (kongruent)

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel 5.Kl.,Übergangsklasse ; 3. & 4.Kl.

Nr. 007

zu Übungsleuchtturm

017

Vektorrechnung in der Ebene

Definition eines Vektors

Ein Vektor ist die Menge aller gleich langen und gleich gerichteten **parallelen** Pfeile (der Zeichenebene)

Die Spitze Minus Schaft Regel eines Pfeils $\overrightarrow{BV}$ der die Strecke $\overline{BV}$ repräsentiert, besagt, dass der Anfangspunkt B der Strecke $\overline{BV}$ vom Endpunkt V subtrahiert wird.

Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist definiert als die Wurzel aus der Summe seiner quadrierten Eintragungen. (x-Koordinate zum Quadrat plus y-Koordinate zum Quadrat)

Der **Betrag** eines Vektors $\vec{l} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ ist $\boxed{|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$

Der Betrag eines Vektors $|\overrightarrow{NO}| = |O - N|$ **richtig**

Addition und Subtraktion von Vektoren

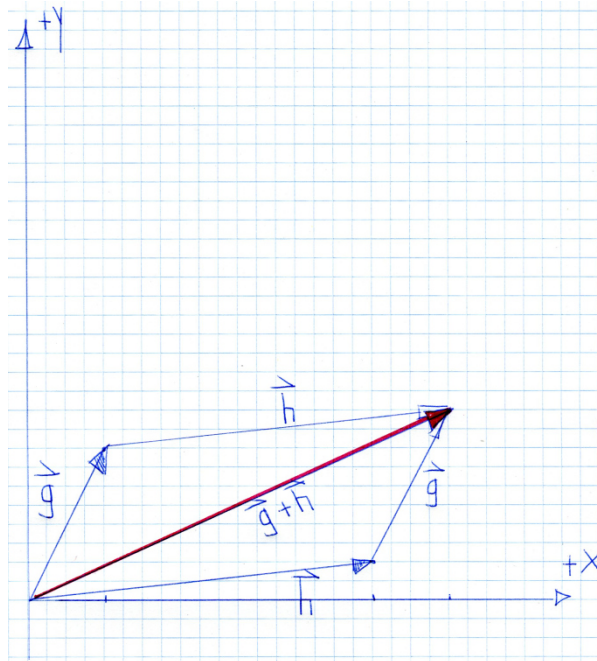
Der Summenvektor zweier Vektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ **entspricht der Diagonalen eines durch die Pfeile $\vec{g}$ und $\vec{h}$ aufgespannten Parallelogramms.**

Zusatz:

Berechne den Summenvektor der beiden Vektoren $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{h} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Stelle diesen grafisch dar.

$$\vec{g} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Die beiden Vektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ werden subtrahiert ,

indem der Gegenvektor von $\vec{h}$ zum Vektor $\vec{g}$ addiert wird!!!!

$$\vec{g} - \vec{h} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h_x \\ -h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x - h_x \\ g_y - h_y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar (Skalarmultiplikation)

Multiplizieren wir den Vektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit dem Skalar $r = -7$

so führt dies zu einer **Änderung der Orientierung**, mit $r = 49$ zu einer **Streckung**.

Berechne jeweils den Vektor der durch die Multiplikation mit dem Skalar entsteht.

$$(-7) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-7) \cdot 2 \\ (-7) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -28 \end{pmatrix}$$

$$49 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \cdot 2 \\ 49 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 196 \end{pmatrix}$$

Die Skalarmultiplikation eines Vektors $\vec{f}$ mit $z \in \mathbb{R}$ wird exakt definiert mit

$$z \cdot \vec{f} = z \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cdot f_x \\ z \cdot f_y \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$z = 9 \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$9 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 13 \\ 9 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Parallelität von Vektoren

Zeichne den Vektor (Pfeil) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ im Koordinatensystem

Zeichne einen zu $\vec{u}$ parallelen Pfeil

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \end{pmatrix}$ ist zum Beispiel parallel zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ oder $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Parallelitätskriterium für diese beiden Pfeile

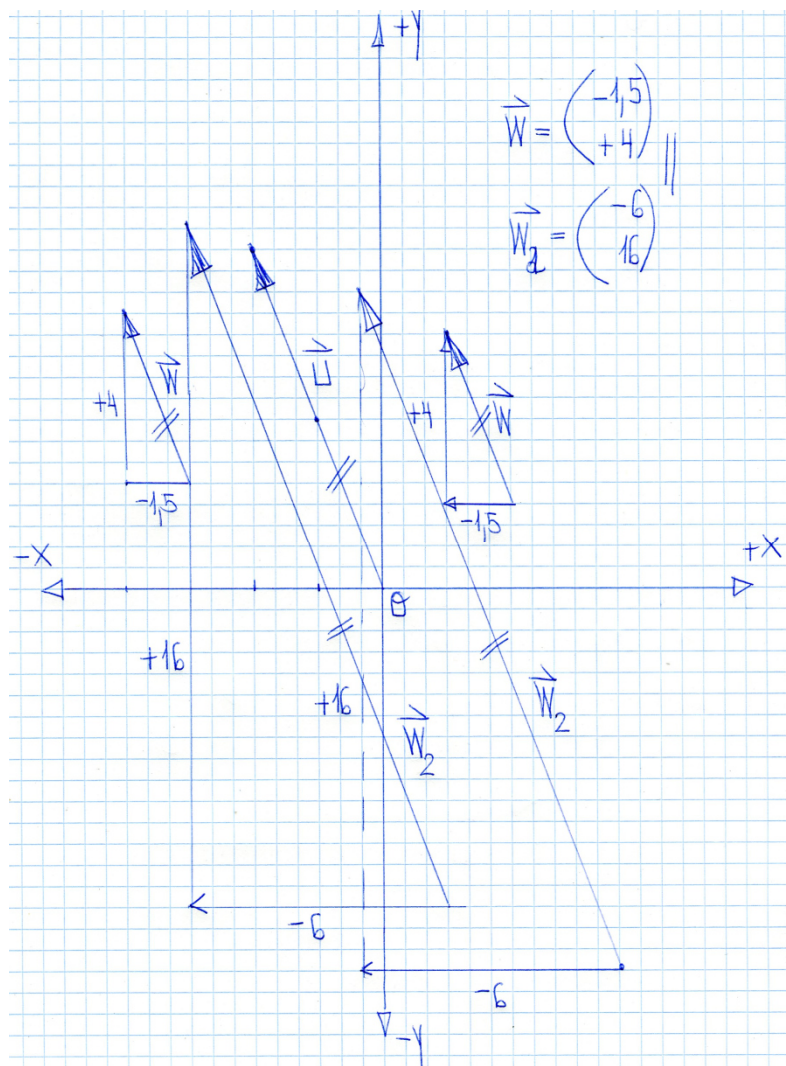
$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = s \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = s \cdot \vec{u}$$

$$-3 = s \cdot (-6) \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$8 = s \cdot 16 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 16 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$



Musterbeispiel:

Überprüfe, ob die beiden Vektoren **zueinander parallel** sind! Setze ein Zeichen ein

1.) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \vec{z} = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{x} \vec{z}$	nicht parallel	$s = -\frac{12}{22} \quad s = -\frac{14}{4}$
2.) $\vec{g} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} \vec{p} = \begin{pmatrix} -52 \\ -156 \end{pmatrix} \vec{g} \vec{p}$	nicht parallel	$s = -\frac{1}{4} \quad s = +\frac{1}{4}$
3.) $\vec{k} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} \vec{m} = \begin{pmatrix} -52 \\ 156 \end{pmatrix} \vec{k} \vec{m}$	parallel	$s = +\frac{1}{4} \quad s = +\frac{1}{4}$
4.) $\vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{19}{9} \end{pmatrix} \vec{y} \vec{c}$	parallel	$s = \frac{1}{9} \quad s = \frac{1}{9}$

#	nicht parallel zu
---	-------------------

Der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{CX}$ wird durch die Formel

$$\frac{C+X}{2} \text{ berechnet.}$$

Halbierungspunkte von Strecken im Sinne der Vektorrechnung finden ihre Anwendung etwa bei der Berechnung der Seitensymmetrale oder Schwerlinie im Dreieck

Der Nullvektor, Ortsvektor, Richtungsvektor

Ein **Richtungsvektor** ist ein Vektor mit der Länge 1 auf einer Strecke.

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ wäre ein Richtungsvektor von $\vec{s} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} = 13 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor ist ein Vektor, der die Länge 0 besitzt, ist daher der Ursprung im Koordinatensystem, ein Pfeil, den wir **nur als Punkt** sehen.

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{0}| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Ein **Ortsvektor** hat seinen Schaft **-Anfangspunkt-im Ursprung des Koordinatensystems**.

Der Einheitsvektor

Der Einheitsvektor findet seine Anwendung beim *Abtragen von Strecken*

oder zur Bildung des Seitenmittelpunktes sowie zur Überprüfung der Parallelität zweier Vektoren.

Die Formel für den Einheitsvektor ist

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{|\vec{e}|} \cdot \vec{e}$$

Ü Musterbeispiel

Gegeben ist der Vektor $\vec{s}$. Gesucht ist der Einheitsvektor $\vec{s}_0$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_0 = \frac{1}{|\vec{s}|} \cdot \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{1690}} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{\sqrt{1690}} \\ \frac{39}{\sqrt{1690}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,316 \\ 0,949 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt

Seien $\vec{i}$ und $\vec{g}$ Vektoren. Ihr Skalarprodukt ist definiert durch

$$\vec{i} \cdot \vec{g} = i_x \cdot g_x + i_y \cdot g_y = \text{ZAHL}$$

Keine Vektorklammer!!!

Das Ergebnis des skalaren Produkts ist stets eine reelle Zahl.

Ü Musterbeispiel

Das skalare Produkt von

$$1.) \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{z} = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{x} \cdot \vec{z} \text{ ist } -709$$

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} = -12 \cdot 22 + 14 \cdot -4 = -709$$

$$2.) \vec{g} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} -52 \\ -156 \end{pmatrix} \quad \vec{g} \cdot \vec{p} \text{ ist } -5408$$

$$\vec{g} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -52 \\ -156 \end{pmatrix} = -13 \cdot -52 + 39 \cdot -156 = -5408$$

Der Normalvektor- orthogonale Vektoren-

Linksgekippte- rechtsgekippte Vektoren

Die Orthogonalitätsbedingung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_1 = \vec{x}_\perp^l = \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Den **linksgekippten** orthogonalen Vektor erhalten wir, indem wir **die Koordinaten vertauschen** und das Vorzeichen der **x-Koordinate** ändern.

Den zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix}$ **rechtsgekippten** orthogonalen Vektor erhalten wir, indem wir **die Koordinaten vertauschen** und das Vorzeichen der **y-Koordinate** ändern.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_1 = \vec{x}_\perp^r = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Zu einem Vektor in der Ebene gibt es stets **2 orthogonale Vektoren**

Bilden wir das skalare Produkt eines Vektors mit seinem linksgekippten orthogonalen Vektor, so erhalten wir 0 als Ergebnis.

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix} = 168 - 168 = 0 \quad \text{Orthogonalitätskriterium}$$

Das Skalarprodukt aus jedem linksgekippten orthogonalen Vektor und rechtsgekippten orthogonalen Vektor ist stets ungleich Null.

z.B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_1 = \vec{x}_\perp^l = \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_1 = \vec{x}_\perp^r = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\perp^l \cdot \vec{x}_\perp^r = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix} = 14 \cdot -14 + 12 \cdot -12 = -340 \neq 0$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -52 \\ -156 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{p}_\perp^l = \begin{pmatrix} 156 \\ -52 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{z}_\perp^r = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \boxed{\vec{z}_\perp^r = \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \end{pmatrix}}$$

Bilden wir das skalare Produkt eines Vektors mit seinem linksgekippten orthogonalen Vektor, so erhalten wir 0 als Ergebnis. Dies entspricht dem Orthogonalitätskriterium.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_1 = \vec{x}_\perp^l = \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix} = 168 - 168 = 0 \quad \textbf{Orthogonalitätskriterium.}$$

Ü Musterbeispiel

Überprüfe, ob die beiden Vektoren zueinander normal (orthogonal) stehen

$$1.) \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 22 \end{pmatrix} \vec{z} = \begin{pmatrix} 22 \\ -12 \end{pmatrix} \vec{x} \text{ nicht normal zu } \vec{z} \quad a \not\perp b$$

$$2.) \vec{g} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} \vec{p} = \begin{pmatrix} -52 \\ -48 \end{pmatrix} \vec{g} \text{ nicht normal zu } \vec{p} \quad a \not\perp b$$

$$3.) \vec{k} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \end{pmatrix} \vec{m} = \begin{pmatrix} 39 \\ 13 \end{pmatrix} \vec{k} \perp \vec{m}$$

$$4.) \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \end{pmatrix} \vec{c} = \begin{pmatrix} -19 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{y} \perp \vec{c}$$

Der Winkel zwischen 2 Vektoren (→Geraden)

Der Cosinus des Winkels zwischen 2 Vektoren ist das *Skalare Produkt der Schenkelvektoren* dividiert durch das *Produkt deren Beträge*.

Ein Teil des Bruches ist die Einheitsvektorformel

$$\cos \varphi = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{j}|}$$

$$\frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} \quad \text{und} \quad \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|} \dots\dots\dots \text{Einheitsvektorformel (siehe vorher)}$$