Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm <u>5.Kl.</u> 016 <u>-> & UE/ 4.Kl.</u>

=Übungskapitel

Funktionen und Kompetenzen Teil2

Lineare und quadratische Funktionen-Funktionsarten-Standards und Kompetenzen

<u>Erforderlicher Wissensstand</u> *(->Stoffübersicht im Detail siehe auch* ***<u>Wissensleuchtturm</u>*** *der 5.Klasse)*

Reelle Funktionen- Funktionsdarstellungen aller Art

Lineare und quadratische Funktionen- Definitionen,Eigenschaften können und ihren typischen Verlauf erkennen können
Polynomfunktionen 3.& 4.Grades , *Gaußklammer-,Signum-und Betragsfunktion*

Quadratische Gleichungen- Zusammenhänge mit Parabeln

Lage von quadratischen Funktionen erkennen Satz von Vieta anwenden

Lösen von quadratischen Gleichungen -Nullstellen; Scheitelbestimmung->Parabeln

<u>Ziel dieses Kapitels (dieses Übungsleuchtturms) ist:</u>

Interpretieren von Funktionsgrafiken mittels „Schaubildern“

Erkennen wo eine Funktion vorliegt und wo nicht

Erkennen von Zusammenhängen bei Funktionen; funktionale Abhängigkeit

Querverbindungen im Zuge der Interpretation und Analyse aus Grafen erkennen und verstehen

Lösungen findest du ab Seite 16

Lineare und quadratische Funktionen- Standards und Kompetenzen

1.)

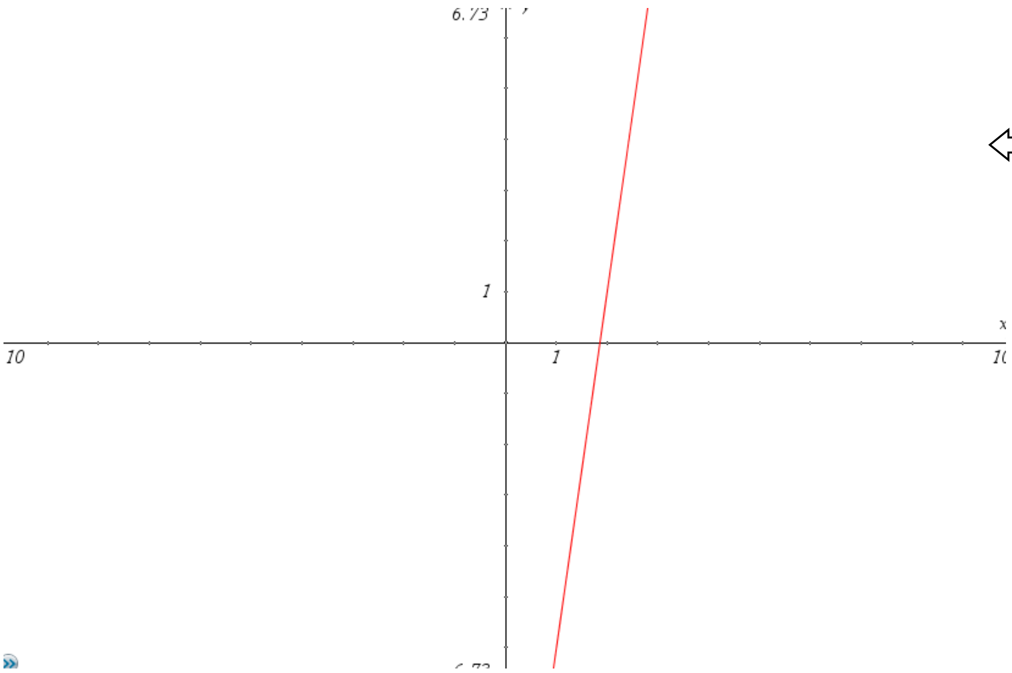
Kreuze an, welche der folgenden Grafiken **eine Funktion** per Definition darstellen!!!

Begründe und erkläre mit deinen eigenen Worten, warum eine Funktion vorliegt oder nicht!!!! Definiere!

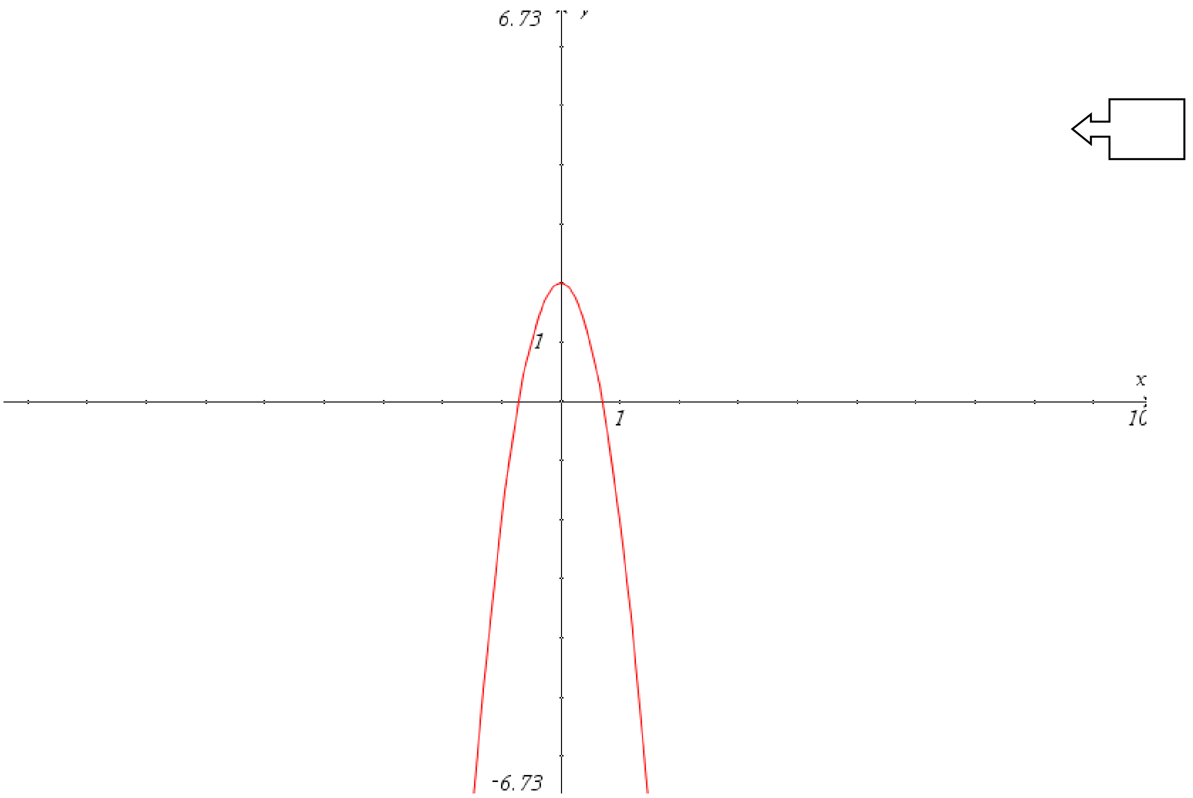
Ordne die richtige Funktionsgleichung dem Schaubild (Grafik) zu!! (siehe S6)

Welche Figur /welche Kurve /welches Gebilde stellt die Gleichung dar?

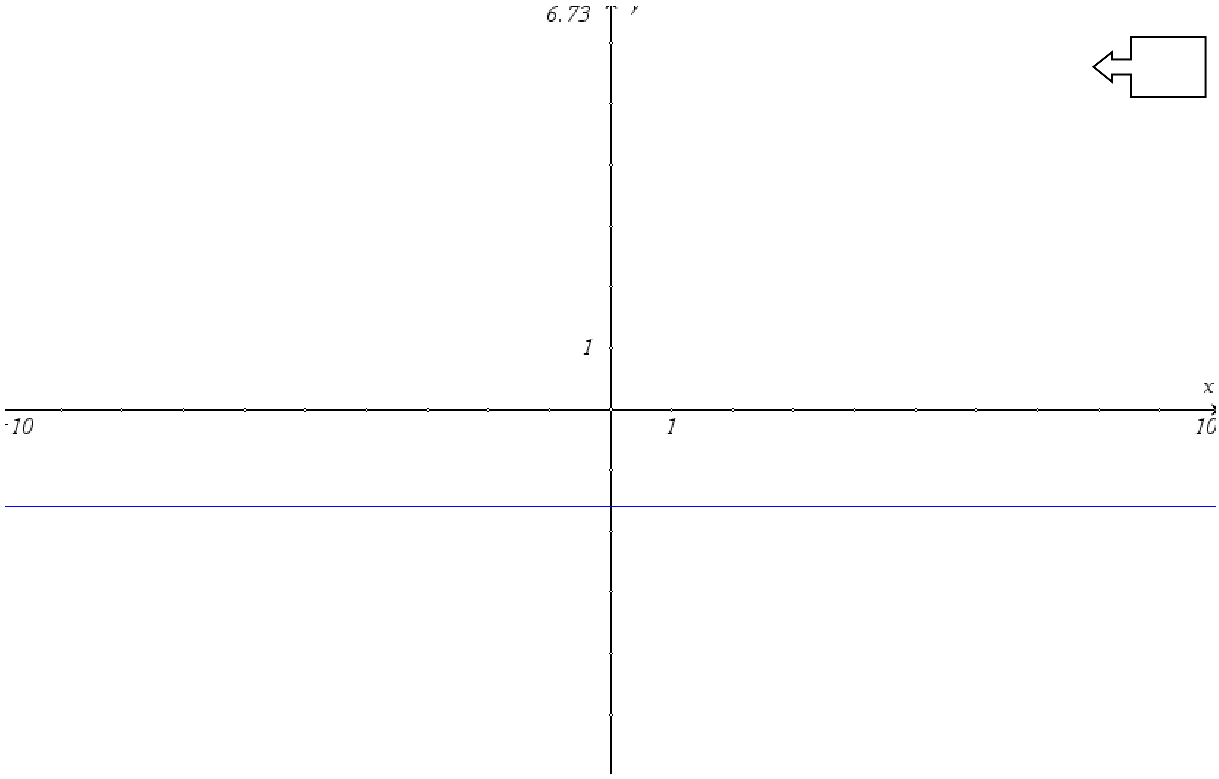
A



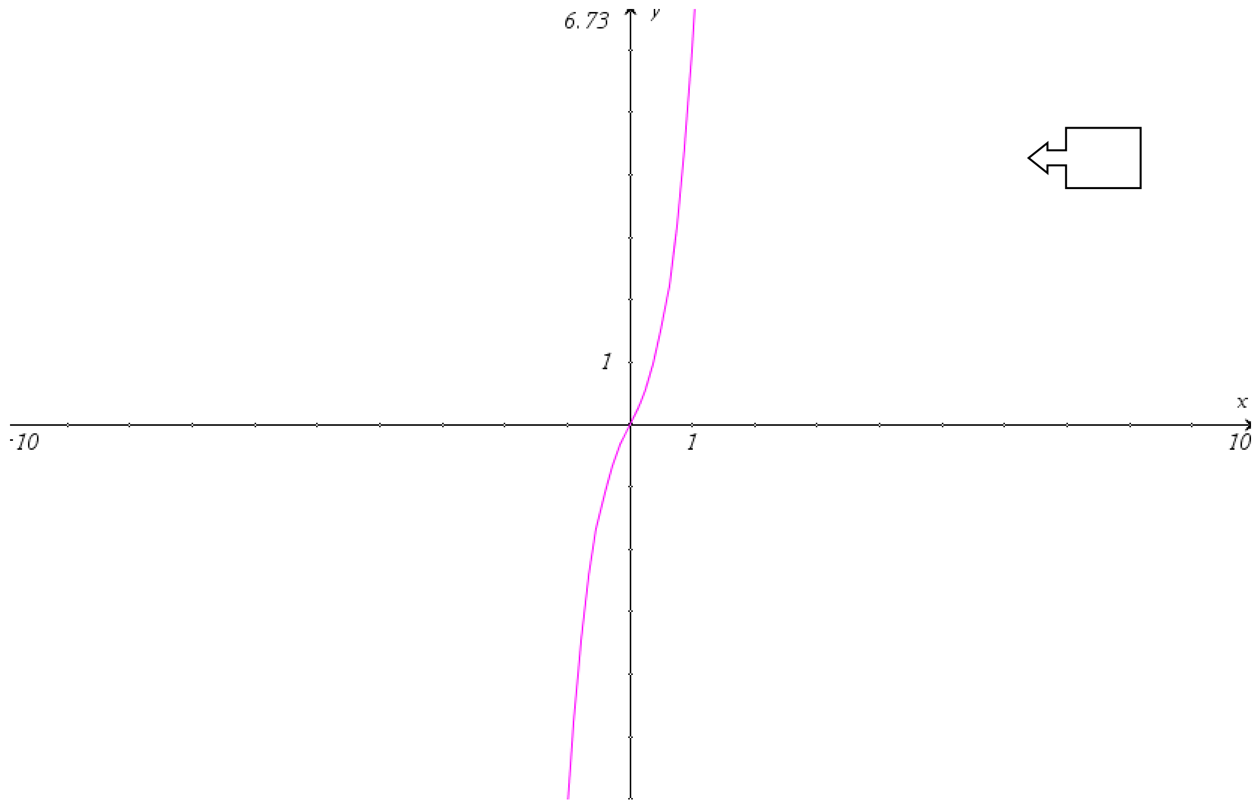
B



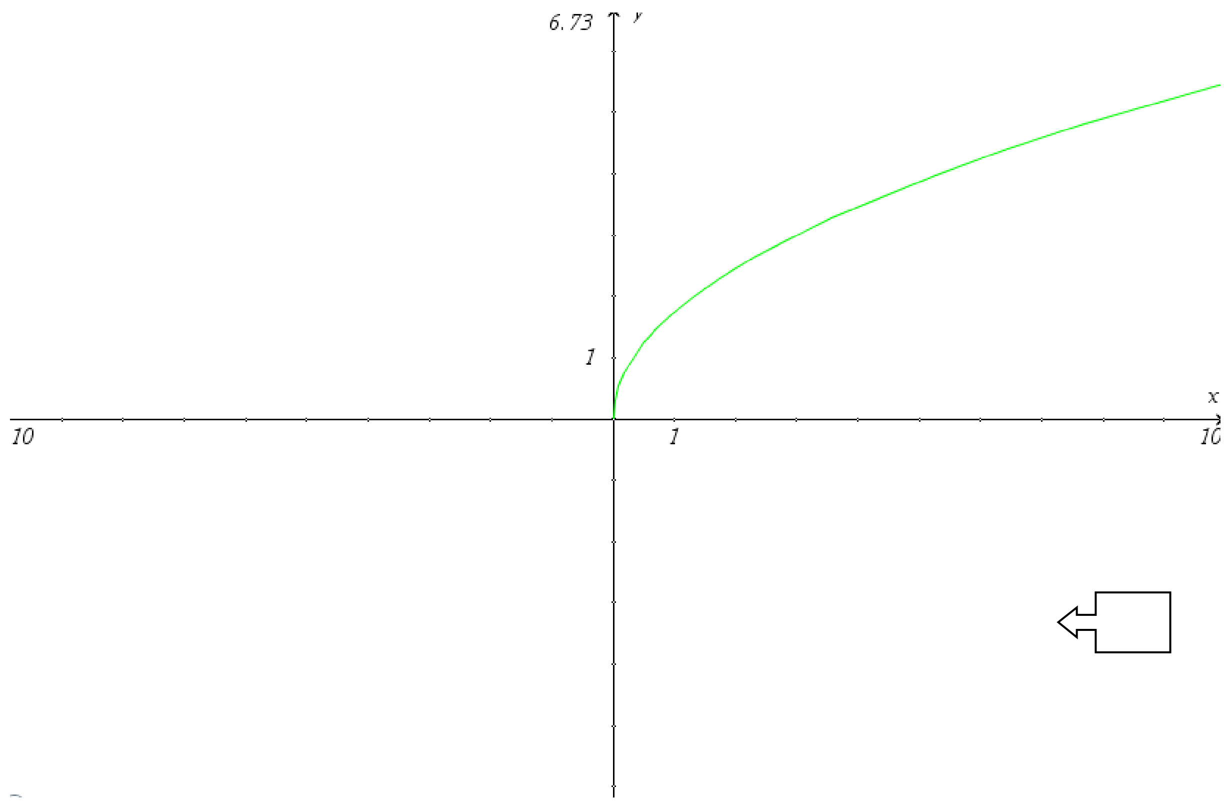
C



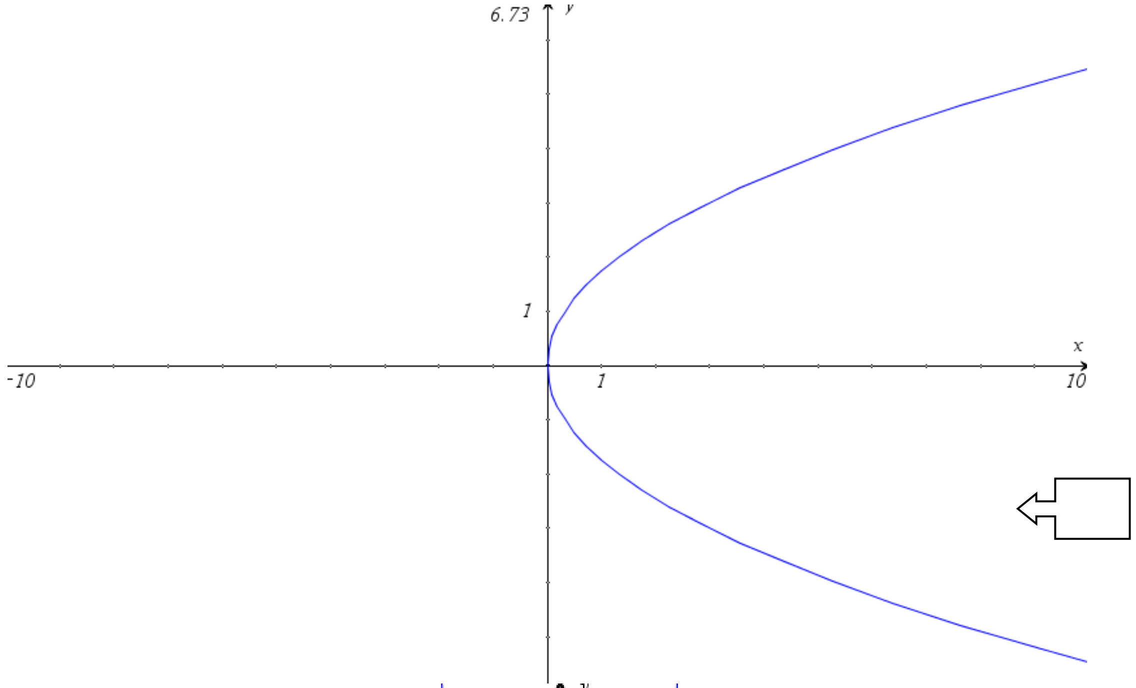
D



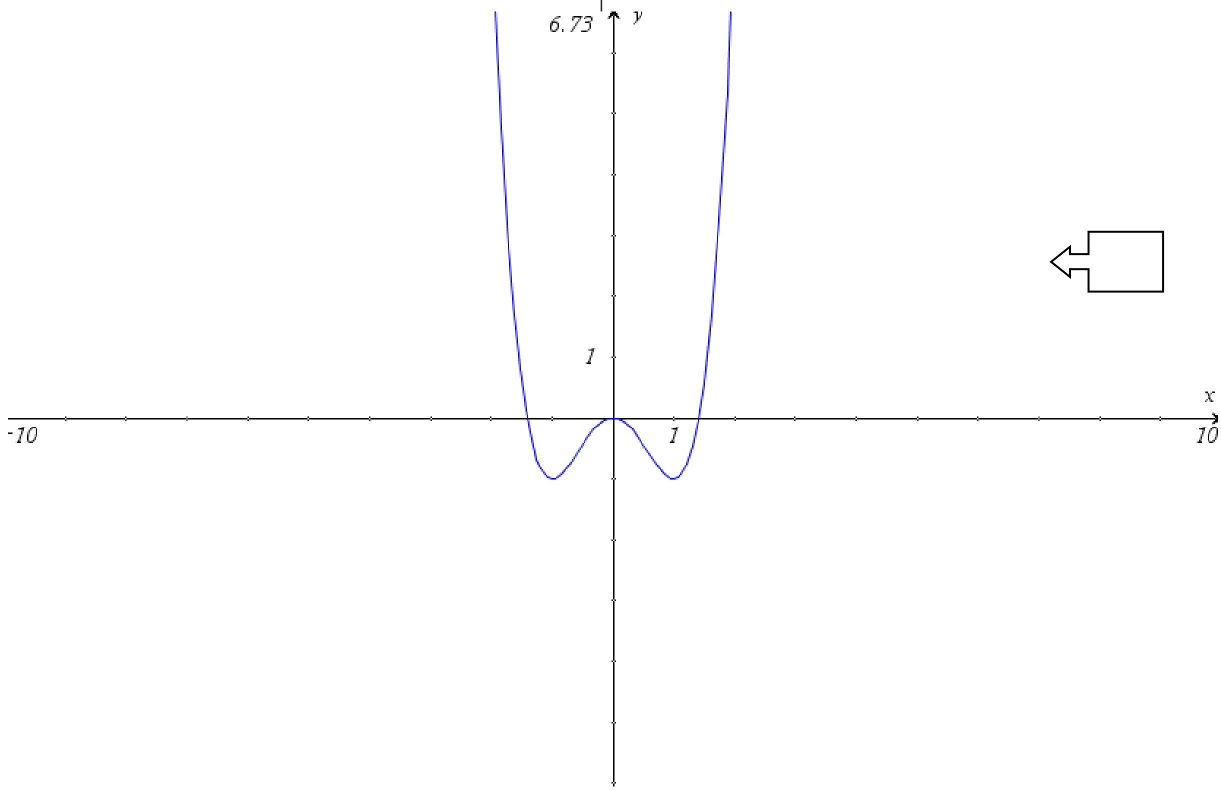
E



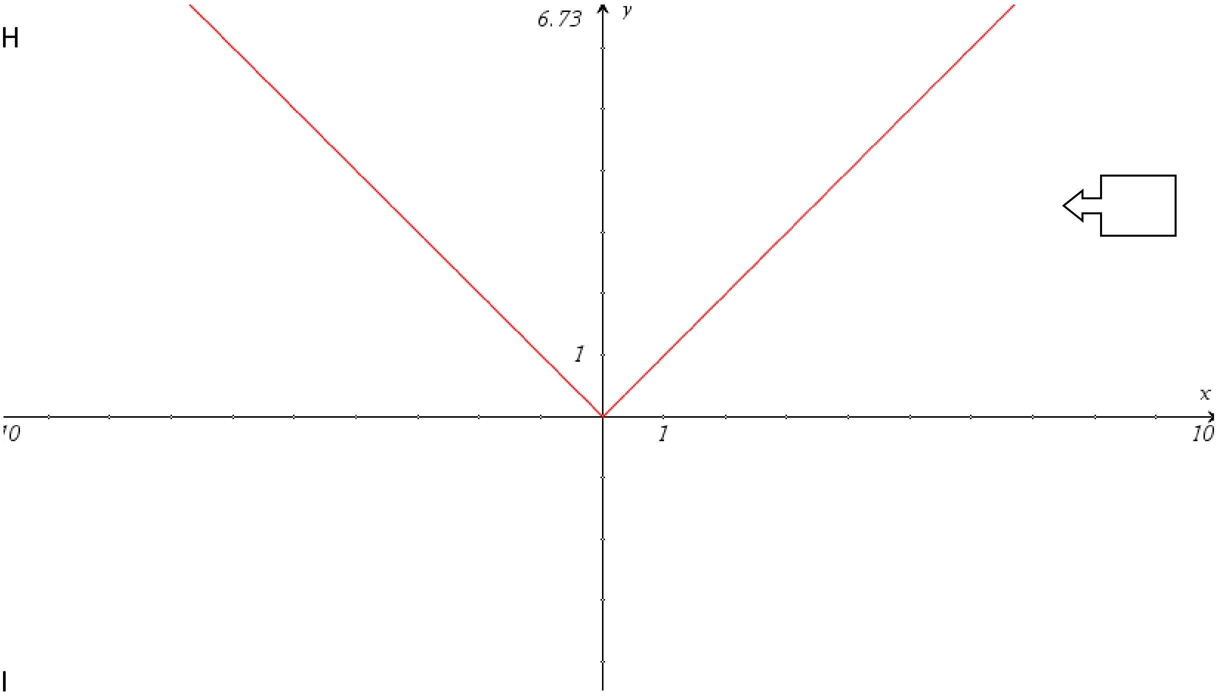
F



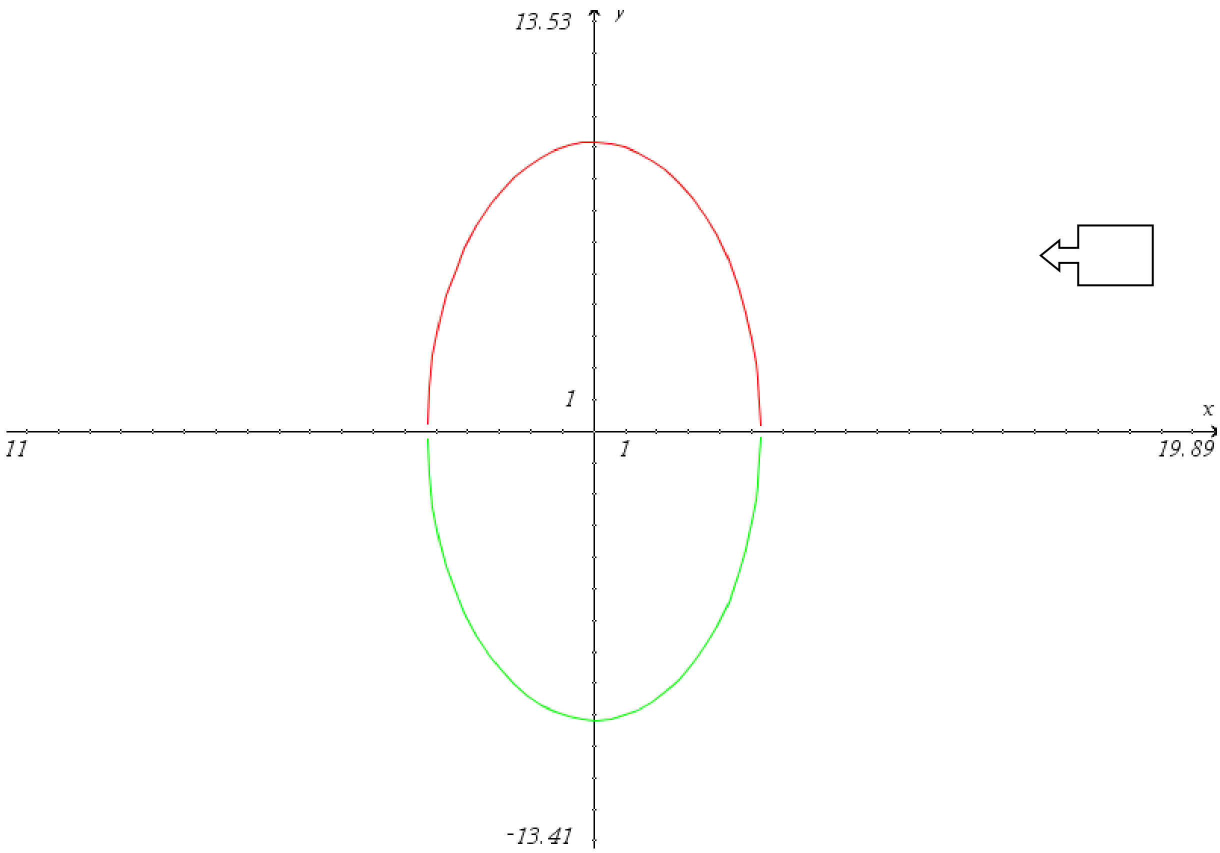
G



H



I



Diese Funktionsgleichungen sind den Grafiken richtig zuzuordnen:

1. $y = f(x) = \sqrt{3x}$
2. $y = f(x) = 4x^3 + 2x$
3. $y = f(x) = x^4 - 2x^2$
4. $y = f(x) = -4x^2 + 2$
5. $y = f(x) = |x|$
6. $y = f(x) = \pm\sqrt{-3x^2 + 84} \rightarrow 3x^2 + y^2 = 84$
7. $y = f(x) = -\frac{8}{5}$

8 $y = f(x) = \pm\sqrt{3x} \rightarrow y^2 = 3x$

9. $y = f(x) = 7x - 13$

2.) Gib an, ob die folgenden Behauptungen eine **wahre oder falsche Aussage** darstellen!

Falls es sich um eine falsche Aussage handelt, stelle die Aussage richtig!!

1.) Eine *lineare Funktion* kann auch eine *Parallele zur x-Achse* sein.

2.) Eine *bijektive Funktion* kann niemals die Gestalt einer Parabel der Form

$y = f(x) = ax^2 + b$ haben.

3.) Die linke Spalte der Wertetabelle wird als Schaubild bildlich umgesetzt als *Wertemenge* bezeichnet.

4.) Die Funktion $y = f(x) = -4x^2 + 10$ ist *injektiv und surjektiv*

5.) Die Funktion $y = f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + 13$ verläuft durch den Punkt $P(13/0)$

6.) Die Funktionen $y = f(x) = -4x^2 + 9$ und $y = f(x) = -4x^2 + 7$ unterscheiden sich in ihrer Lage zueinander durch eine *Verschiebung auf der y-Achse*, sie sind *beide gleich weit geöffnet.*

7.) Die Funktionsparabel $y = f(x) = 6x^2 + 9$ ist *weiter geö*ffnet als die Funktionsparabel

$y = f(x) = 2x^2 + 9$.

8.) Betrachten wir allgemein $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$,

können wir interpretierend über den Koeffizienten a und den konstanten Faktor b sagen:

Je größer $a > 0$ wird und je kleiner $a < 0$ bei fixem b wird, desto enger wird die Öffnung der Parabel.

Je kleiner $a > 0$ wird und je größer $a < 0$ bei fixem b wird, desto weiter wird die Öffnung der Parabel.

9.) *Definitionsmenge* und *Bildmenge* sind identische Ausdrücke.

10.) Jede lineare Funktion ist graphisch gesehen eine *Gerade die nicht durch den Ursprung* verläuft.

11.) Werden *ein und demselben* Element aus der Definitionsmenge zwei *verschiedene* Werte zugeordnet, so ist dies <u>keine Funktion</u>.

12.) Die Gleichung einer Ellipse und Hyperbel stellen *keine Funktionen per Definiti*on dar.

13.) Funktionen der Form $y = f(x) = ax^2 + b$ haben *symmetrisch angelegte Bildelemente*.

14.) *Nullstellen einer (quadratischen) Funktion* sind graphisch gesehen die *Schnittpunkte mit der y-Achse.*

15.) Ermittlung der Nullstellen einer quadratischen Funktion bedeutet rechnerisch Lösen einer quadratischen Gleichung.

16.) Die Funktionsparabel $y = f(x) = ax^2 + b$ kann auch *weniger als 2 Nullstellen* besitzen.

17.) Die Funktionsparabel $y = f(x) = ax^2 + b$ kann auch *mehr als 2 Nullstellen* besitzen.

18.) Nullstellen von $y = f(x) = ax^2 + b$ müssen nicht existieren.

17.) Der y-Wert als Koordinate der Nullstelle ist stets Null.

2A.) Argumentiere:

Wann ist eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$ **,** $b < 0$ **oder** $b > 0$ ***nach oben bzw. nach unten geöffnet???***

Ist dies auch von b abhängig???

2B.) Wie unterscheiden sich die beiden Parabeln $y = f(x) = 5x^2 + 3$

und

$y = f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ **in ihrer Lage im Koordinatensystem zueinander?**

Zeichne die beiden Kurven anhand einer Wertetabelle in $[-3;3]$ **und interpretiere!**

3.)

Ordne den Graphen im Schaubild die entsprechenden Funktionsgleichungen zu!

In welchem Punkt schneiden die Grafen die y-Achse???

Wie lautet der *Tiefpunkt?*??

*Wie lauten die **Nullstellen** der Funktionen?(rechnerische Begründung!)*

Interpretiere die gegenseitige Lage (das Verhalten) der Grafen zueinander.

Gehe für deine Erklärungen von $y = f(x) = x^2 + 3$ aus.

Was bewirkt die Varianz bzw. die Konstanz von $a \quad und \quad b$ **in** $y = f(x) = ax^2 + b$ **???**

Zuzuordnen:

$$y = f(x) = x^2 + 3$$

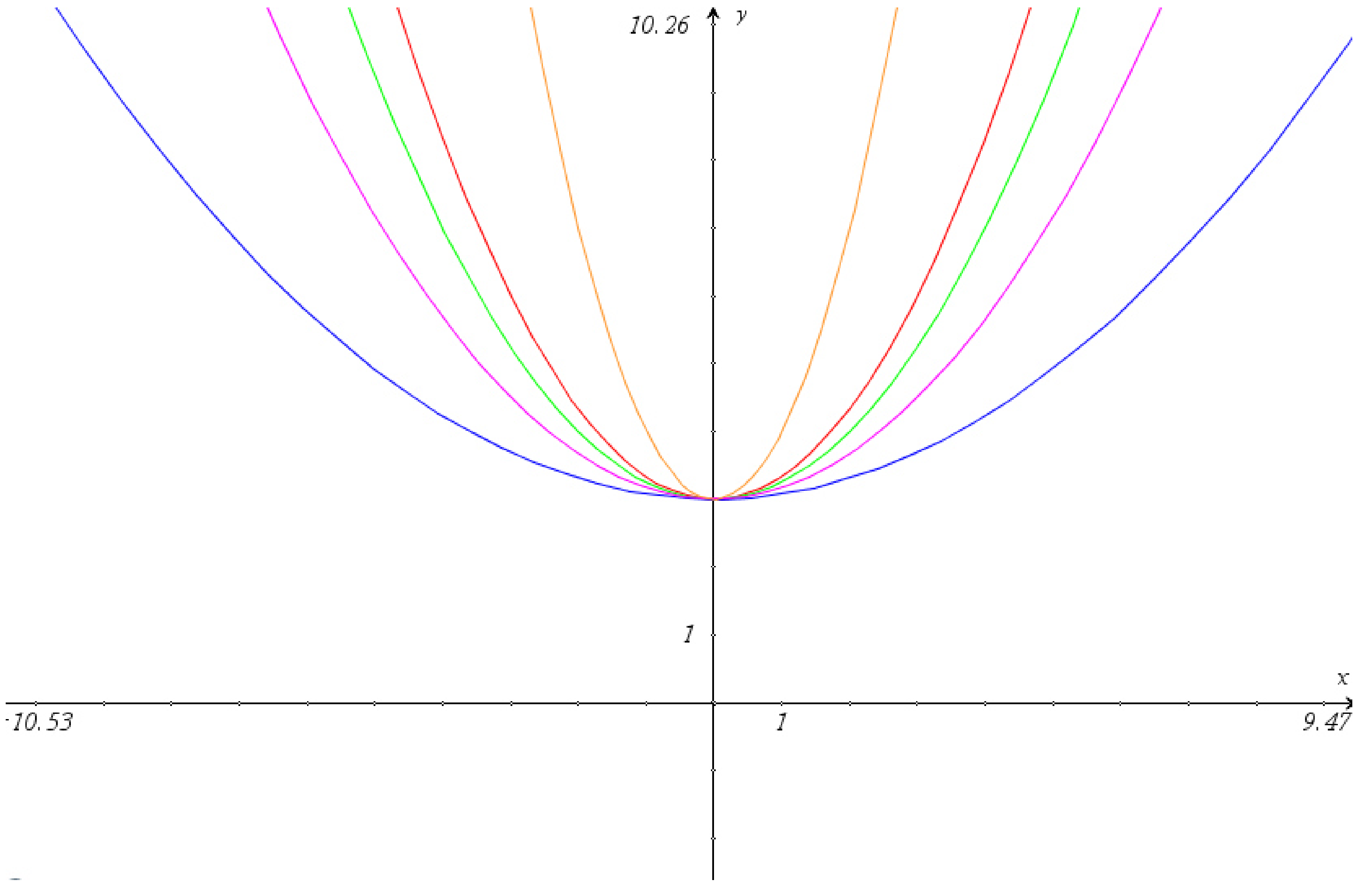
$$y = f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3$$

$$y = f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$y = f_4(x) = \frac{1}{6}x^2 + 3$$

$$y = f_3(x) = \frac{1}{13}x^2 + 3$$

Zeichne die Funktionen anhand einer Wertetabelle in $[-3;3]$**!**


10.26
y
1
x
-10.53
1
9.47

4)

Ordne den Graphen im Schaubild die entsprechenden Funktionsgleichungen zu!

In welchem Punkt schneiden die Grafen die y-Achse???

Wie lautet der Tiefpunkt???

Bestimme rechnerisch *die **Nullstellen** der Funktionen*! Zeichne die *Nullstellen in der Grafik ein!*

Interpretiere die gegenseitige Lage (das Verhalten) der Grafen zueinander.

Gehe für deine Erklärungen von $y = f(x) = x^2 - 2$ aus.

Was bewirkt die Varianz bzw. die Konstanz von $a \quad und \quad b$ **in** $y = f(x) = ax^2 + b$ **???**

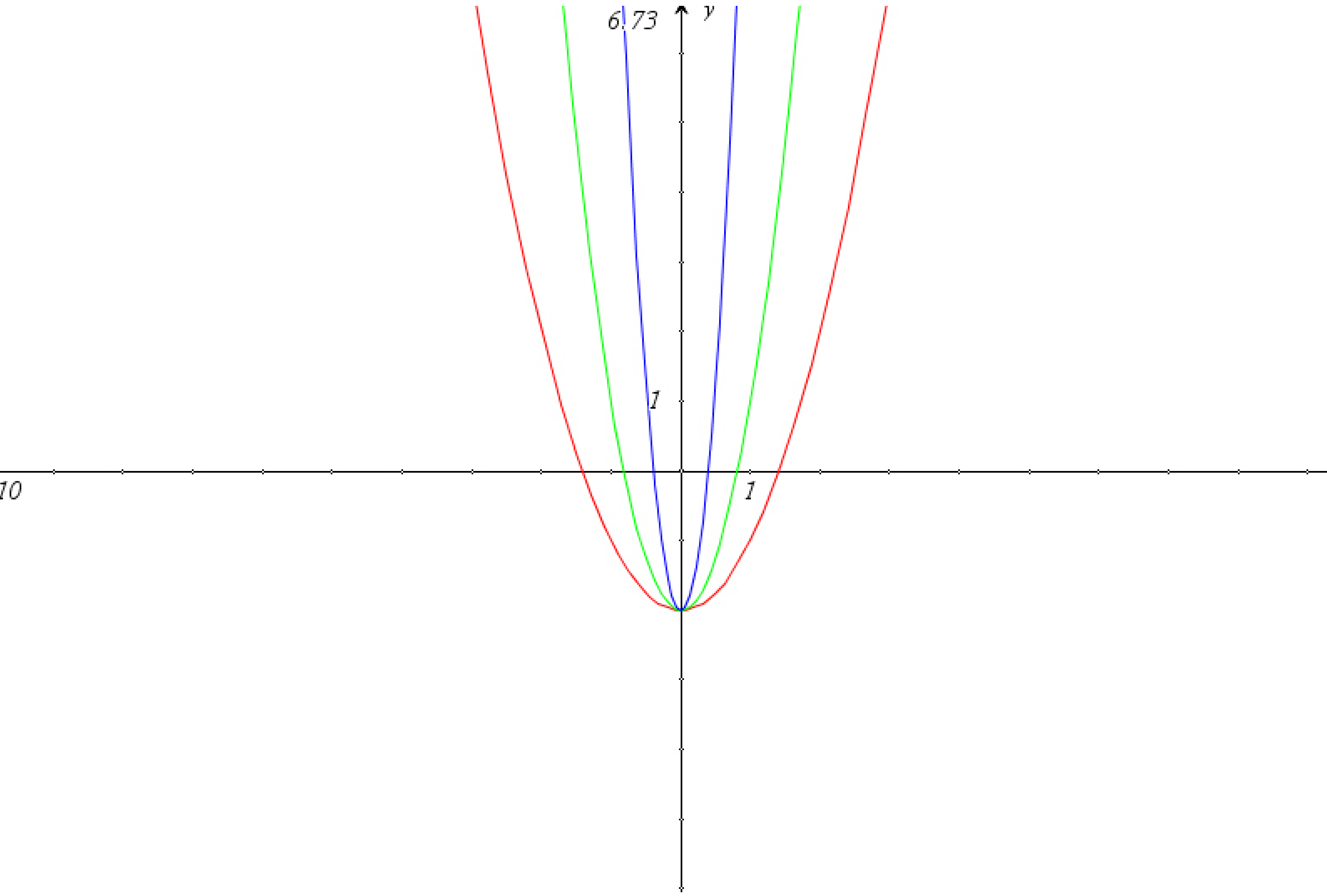
Zuzuordnen:

$y = f_1(x) = x^2 - 2$

$y = f_2(x) = 3x^2 - 2$

$y = f_3(x) = 13x^2 - 2$

Zeichne die Funktionen anhand einer Wertetabelle in $[-3;3]$!


6.73
y
1
10
1

5.)

Ordne den Graphen im Schaubild die entsprechenden Funktionsgleichungen zu!

In welchem Punkt schneiden die Grafen die y-Achse???

Wie lautet der *Hochpunkt?*??

Bestimme rechnerisch die ***Nullstellen** der Funktionen*! Zeichne die Nullstellen in der Grafik ein!

Interpretiere die gegenseitige Lage (das Verhalten) der Grafen zueinander.

Gehe für deine Erklärungen von $y = f(x) = -x^2$ aus.

Was bewirkt die Varianz bzw. die Konstanz von $a \quad und \quad b$ **in** $y = f(x) = ax^2 + b$ **???**

Zuzuordnen:

$y = f_1(x) = -x^2$

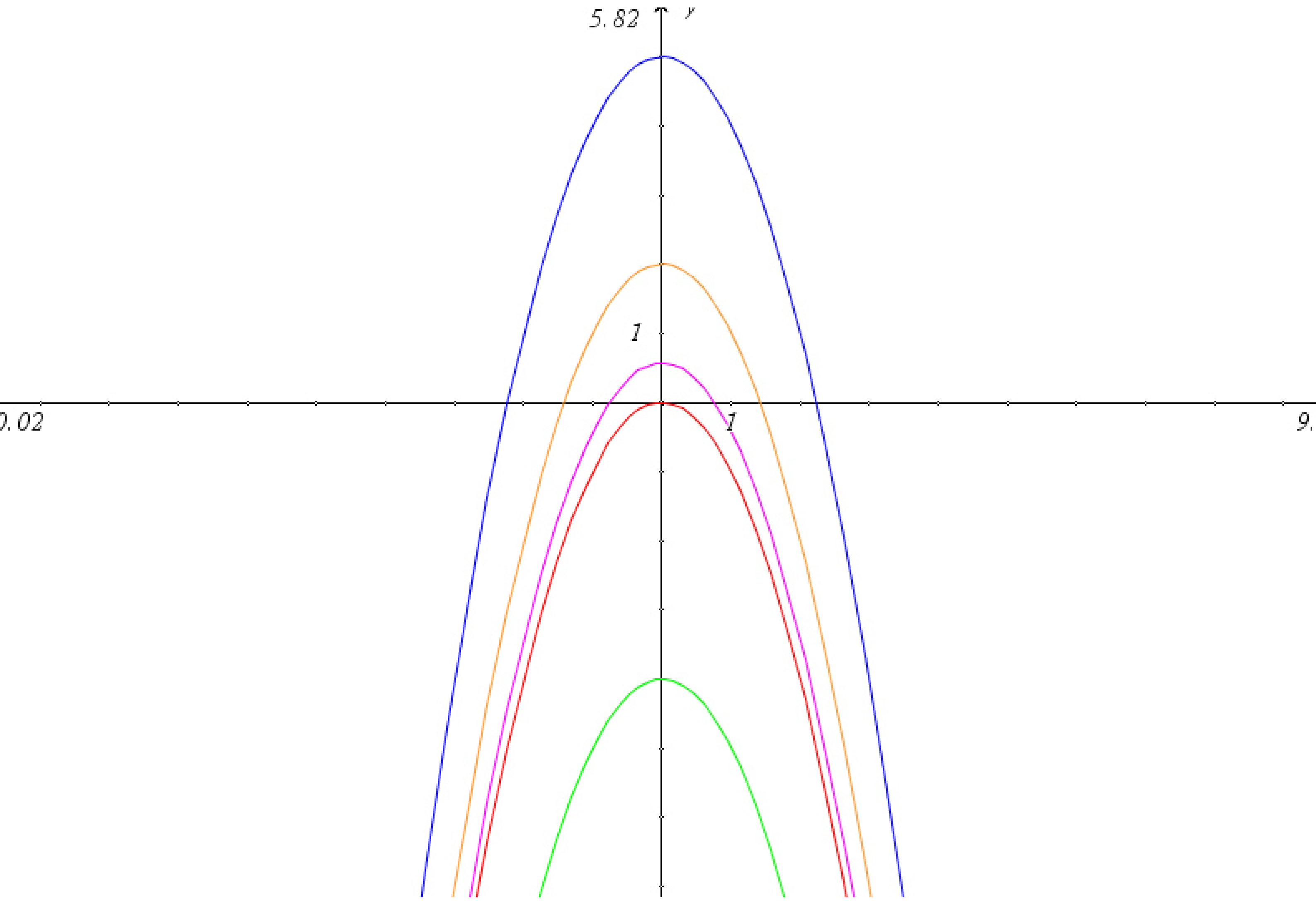
$y = f_2(x) = -x^2 - 4$

$y = f_3(x) = -x^2 + 5$

$y = f_4(x) = -x^2 + \frac{4}{7}$

$y = f_5(x) = -x^2 + 2$

Zeichne die Funktionen anhand einer Wertetabelle in $[-3;3]$!


5.82
y
1
0.02
1
9.

Lösungen

1.) X reuzt sind: A,B,C,D,E,G,H

Die richtigen Zuordnungen:

1. $y = f(x) = \sqrt{3x} \to E$
2. $y = f(x) = 4x^3 + 2x \to D$
3. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 \to G$
4. $y = f(x) = -4x^2 + 2 \to B$
5. $y = f(x) = |x| \to H$
6. $y = f(x) = \pm\sqrt{-3x^2 + 84} \to 3x^2 + y^2 = 84 \to I$
7. $y = f(x) = -\frac{8}{5} \to C$

8 $y = f(x) = \pm\sqrt{3x} \to y^2 = 3x \to F$

9. $y = f(x) = 7x - 13 \to A$

F und I sind (Parabel in 1.Hauptlage und Ellipse) keine Funktionen, *ein und demselben* Element aus der Definitionsmenge werden zwei *verschiedene* Werte aus der Bild- (Werte-) menge zugeordnet!!!!!

2.) Gib an, ob die folgenden Behauptungen eine wahre oder falsche Aussage darstellen!

Falls es sich um eine falsche Aussage handelt, stelle die Aussage richtig!!

1.) Eine lineare Funktion kann auch eine Parallele zur x-Achse sein. **w. A.**

2.) Eine *bijektive Funktion* kann niemals die Gestalt einer Parabel der Form

$y = f(x) = ax^2 + b$ haben. **w. A.**

3.) Die linke Spalte der Wertetabelle wird als Schaubild bildlich umgesetzt als *Wertemenge* bezeichnet. **f. A.**

Sie wird als Definitionsmenge oder Urmenge bezeichnet.

4.) Die Funktion $y = f(x) = -4x^2 + 10$ ist *injektiv und surjektiv* **f. A.**

Sie ist nicht injektiv und surjektiv, denn dies ist bijektiv, da sich aber Werte in der Bildmenge wiederholen, ist dies nicht der Fall.

5.) Die Funktion $y = f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + 13$ verläuft durch den Punkt $P(13/0)$ **f. A.**

verläuft durch den Punkt $P(0/13)$

6.) Die Funktionen $y = f(x) = -4x^2 + 9$ und $y = f(x) = -4x^2 + 7$ unterscheiden sich in ihrer Lage zueinander durch eine *Verschiebung auf der y-Achse*, sie sind *beide gleich weit geöffnet.* **w. A.**

7.) Die Funktionsparabel $y = f(x) = 6x^2 + 9$ ist *weiter geö*ffnet als die Funktionsparabel

$y = f(x) = 2x^2 + 9$. **f. A.**

Die Funktionsparabel $y = f(x) = 6x^2 + 9$ ist *enger geö*ffnet als die Funktionsparabel

$y = f(x) = 2x^2 + 9$.

8.) Betrachten wir allgemein $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$,

können wir interpretierend über den Koeffizienten a und den konstanten Faktor b sagen:

Je größer $a > 0$ wird und je kleiner $a < 0$ bei fixem b wird, desto enger wird die Öffnung der Parabel.

Je kleiner $a > 0$ wird und je größer $a < 0$ bei fixem b wird, desto weiter wird die Öffnung der Parabel. **w. A.**

9.) *Definitionsmenge* und *Bildmenge* sind identische Ausdrücke. **f. A.**

Wertemenge und *Bildmenge* sind identische Ausdrücke.

10.) Jede lineare Funktion ist graphisch gesehen eine *Gerade die nicht durch den Ursprung* verläuft. **f. A.**

Auch Geraden durch den Ursprung verlaufend sind lineare Funktionen, sie werden homogen genannt.

11.) Werden *ein und demselben* Element aus der Definitionsmenge zwei *verschiedene* Werte zugeordnet, so ist dies keine Funktion. **w. A.**

12.) Die Gleichung einer Ellipse und Hyperbel stellen *keine Funktionen per Definition* dar. **w. A.**

13.) Funktionen der Form $y = f(x) = ax^2 + b$ haben *symmetrisch angelegte Bildelemente*. **w. A.**

14.) *Nullstellen einer (quadratischen) Funktion* sind graphisch gesehen die *Schnittpunkte mit der y-Achse.* **f. A.**

Nullstellen einer (quadratischen) Funktion sind graphisch gesehen die *Schnittpunkte mit der* ***x****-Achse.*

15.) Ermittlung der Nullstellen einer quadratischen Funktion bedeutet rechnerisch Lösen einer quadratischen Gleichung. **w. A.**

16.) Die Funktionsparabel $y = f(x) = ax^2 + b$ kann auch *weniger als 2 Nullstellen* besitzen. **w. A.**

17.) Die Funktionsparabel $y = f(x) = ax^2 + b$ kann auch *mehr als 2 Nullstellen* besitzen. **f. A.**

Sie kann höchstens 2 Nullstellen besitzen.

18.) Nullstellen von $y = f(x) = ax^2 + b$ müssen nicht existieren. **w. A.**

17.) Der y-Wert als Koordinate der Nullstelle ist stets Null. **w. A.**

2A.) Argumentiere:

Wann ist eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$ *nach oben bzw. nach unten geöffnet???*

Ist dies auch von b abhängig???

Eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$ ist *nach oben geöffnet, wenn*

$a > 0$

Eine Parabel der Form $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$ ist *nach unten geöffnet, wenn*

$a < 0$

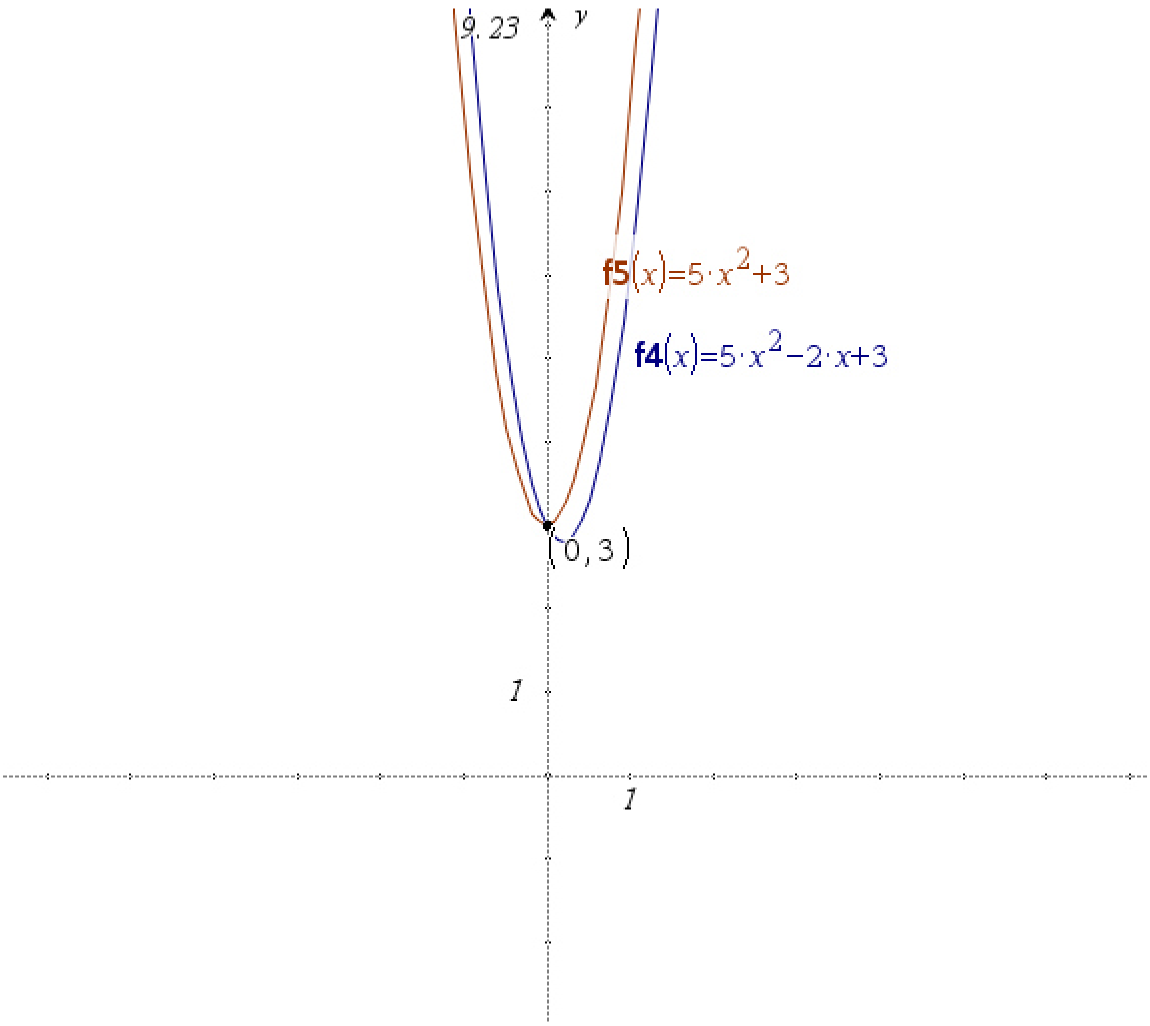
b spielt keine Rolle.

2B.) Wie unterscheiden sich die beiden Parabeln $y = f(x) = 5x^2 + 3$

und

$y = f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ in ihrer Lage im Koordinatensystem zueinander ?

$y = f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ ist von der y-Achse bezüglich des Tiefpunktes $T(0/3)$ *von* $y = f(x) = 5x^2 + 3$ weg „hinüber verschoben“, in den 1.Quadranten verschoben ,beide Kurven sind gleich weit geöffnet. „Übereinandergelegt“ sind sie deckungsgleich


9. 23
y
f5(x)=5·x^2+3
f4(x)=5·x^2−2·x+3
(0, 3)
1
1

3.) Zuordnung der Funktionsgleichungen- siehe Grafik!

Im Tiefpunkt $T(0/3)$ schneiden die Grafen die y-Achse.

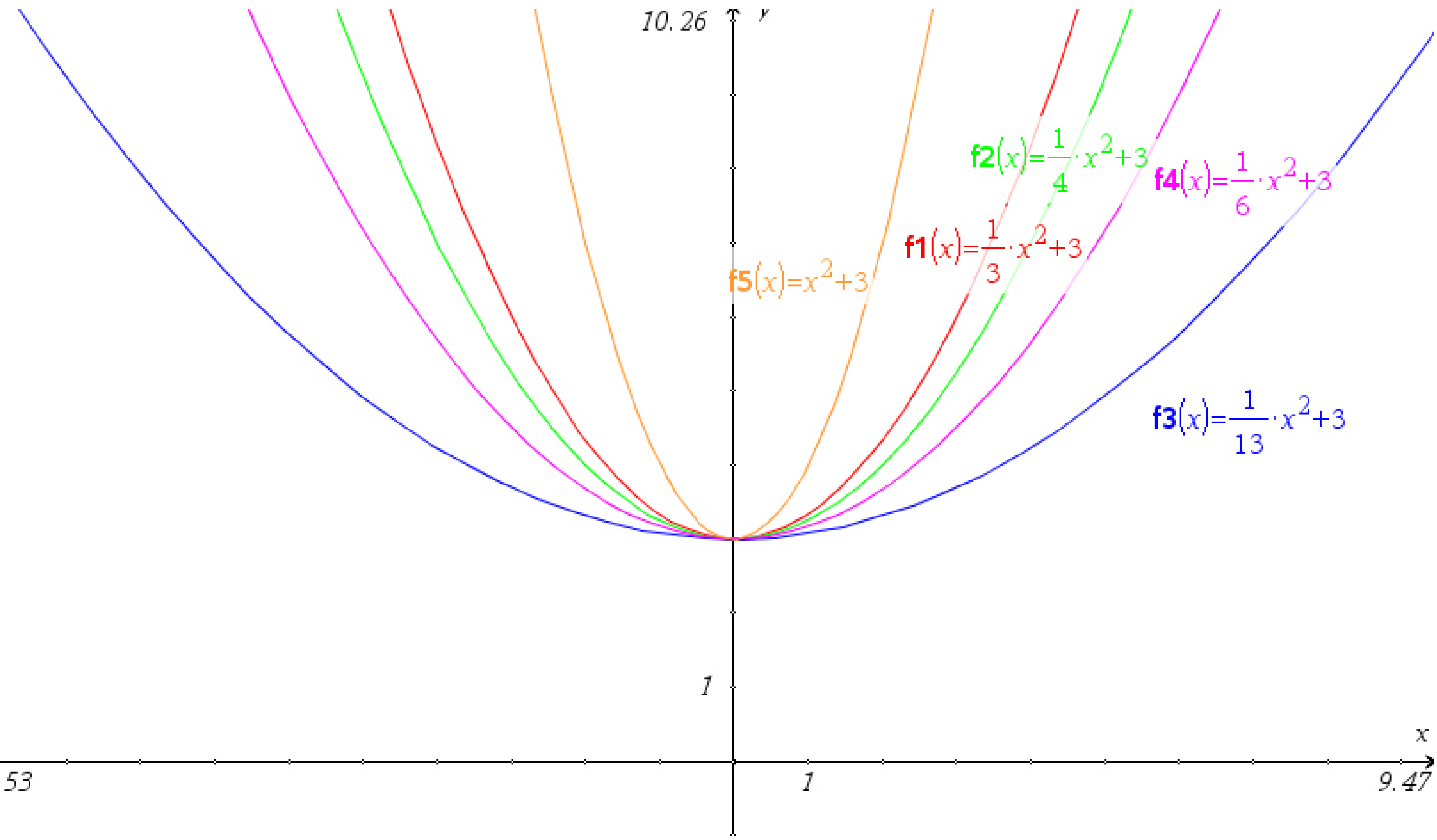
Nullstellen existieren keine, Lösungen der quadratischen Gleichung sind nicht reell!

$$x^2+3=0 \to x^2=-3$$

oder

$$\frac{1}{6}x^2+3=0|\cdot 3 \to x^2+18=0 \to x^2=-18$$

Anhand der Grafik sehen wir, dass die Grafen die x-Achse nicht schneiden.



Betrachten wir allgemein $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$,

können wir interpretierend über den Koeffizienten a und den konstanten Faktor b sagen:

Je größer $a > 0$ wird und je kleiner $a < 0$ bei fixem b wird, desto enger wird die Öffnung der Parabel.

Je kleiner $a > 0$ wird und je größer $a < 0$ bei fixem b wird, desto weiter wird die Öffnung der Parabel.

4.) Zuordnung der Funktionsgleichungen- siehe Grafik!

Im Tiefpunkt $T(0/-2)$ schneiden die Grafen die y-Achse.

$y = f_1(x) = x^2 - 2$

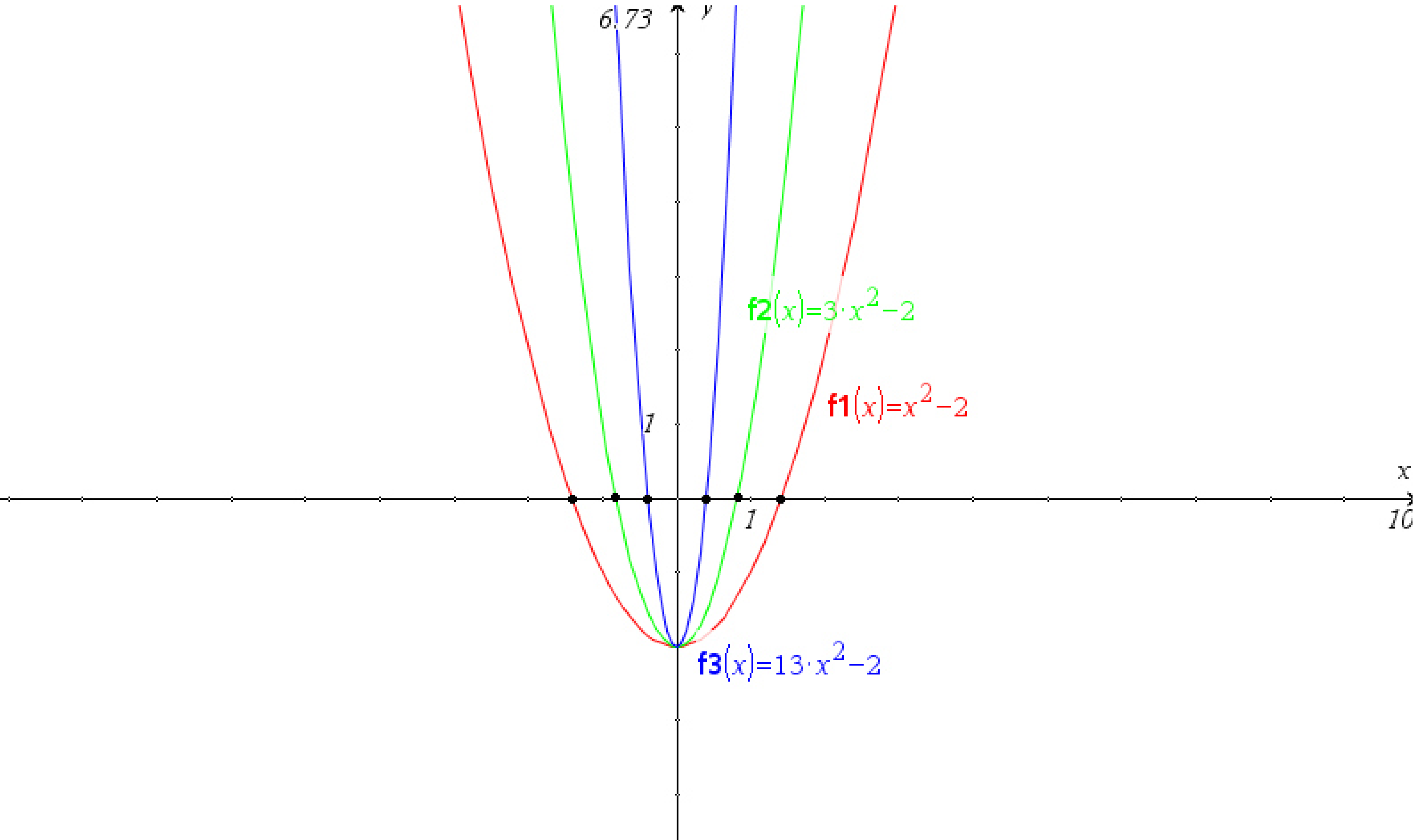
Nullstellen: $N_1(-1{,}41/0)$ $N_2(1{,}41/0)$

$y = f_2(x) = 3x^2 - 2$

Nullstellen: $N_1(-0{,}816/0)$ $N_2(0{,}816/0)$

$y = f_3(x) = 13x^2 - 2$

Nullstellen: $N_1(-0{,}392/0)$ $N_2(0{,}392/0)$



Betrachten wir allgemein $y = f(x) = ax^2 + b$, $b < 0$ oder $b > 0$,

können wir interpretierend über den Koeffizienten a und den konstanten Faktor b sagen:

Je größer $a > 0$ wird und je kleiner $a < 0$ bei fixem b wird, desto enger wird die Öffnung der Parabel.

Je kleiner $a > 0$ wird und je größer $a < 0$ bei fixem b wird, desto weiter wird die Öffnung der Parabel.

5.) Zuordnung der Funktionsgleichungen- siehe Grafik!

$y = f_1(x) = -x^2$

Nullstelle: $N\ (0/0)$=Hochpunkt

$y = f_2(x) = -x^2 - 4$

Nullstellen existieren keine, Lösungen der quadratischen Gleichung sind nicht reell!

$y = f_2(x) = -x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4$

Anhand der Grafik sehen wir, dass der Graf die x-Achse nicht schneidet

$H\ (0/-4)$ Hochpunkt

$y = f_3(x) = -x^2 + 5$

Nullstellen: $N_1(-2{,}24/0)\quad N_2(2{,}24/0)$

$H\ (0/5)$ Hochpunkt

$y = f_4(x) = -x^2 + \frac{4}{7}$

Nullstellen: $N_1(-0{,}756/0)\quad N_2(0{,}756/0)$

$H\ \left(0/\frac{4}{7}\right)$ Hochpunkt

$y = f_5(x) = -x^2 + 2$

Nullstellen: $N_1(-1{,}41/0)\quad N_2(1{,}41/0)$

$H\ (0/2)$ Hochpunkt

Die Funktionsgraphen unterscheiden sich in ihrer Lage zueinander durch eine *Verschiebung auf der y-Achse*, sie sind *beide gleich weit nach unten geöffnet, da* $a < 0$

in $y = f(x) = ax^2 + b$

„Übereinandergelegt" sind sie deckungsgleich (kongruent)