

Die Wurzel- Rechenregeln - Rechnen mit Wurzeln

Potenzen und Wurzeln- Teil 2

Kompetenzen und Standards

Rechnen mit Wurzeln

Partielles Wurzelziehen- Unter die Wurzel bringen

1.)

Schreibe den vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel

**Gib dann nach Berechnung an, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt.
(stelle falsche Aussagen richtig)**

$$I-0) \quad 14\sqrt{5} = \sqrt{980}$$

$$I-1) \quad 6h\sqrt{8} = \sqrt{288h^2}$$

$$I-1-1) \quad 17e^2 f^3 \sqrt{3} = \sqrt{867e^4 f^5}$$

$$I-2) \quad 9\sqrt{5g^2} = \sqrt{45g^2}$$

$$I-3) \quad 14\sqrt{5} = \sqrt{980}$$

$$I-4) \quad 4 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{320}$$

$$I-5) \quad 11m^2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3993m^6} = \sqrt[3]{(11m^2)^3 \cdot 3}$$

$$a) \quad 4x\sqrt{3y} = \sqrt{48x^2y}$$

$$b) \quad 4\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{16} = 2.5198$$

$$c) \quad \frac{4}{7} \cdot \sqrt{\frac{49}{2}} = \sqrt{14}$$

$$d) \quad \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{27}{100}} = \sqrt{\frac{3}{100}} = 0,1732$$

2.) Wurde richtig überlegt und gerechnet??? Überprüfe die einzelnen Schritte!!!!

*Ziehe partiell die Wurzel, **ohne den Taschenrechner** zur Hilfe zu nehmen (also nicht von der Angabe weg einfach auszurechnen mit dem TR)*

Kreuze richtige Behauptungen an!

$$1-0) \sqrt{2700} = \sqrt{3 \cdot 900} = 30\sqrt{3} = 51,9615... =$$

$$1-1) \sqrt{450} = \sqrt{45 \cdot 10}$$

->beide Faktoren unter der Wurzel sind keine Quadratzahlen, ich kann die Wurzel daher nicht partiell ziehen !!

$$a) \sqrt{750} = \sqrt{75 \cdot 10} = \sqrt{3 \cdot 25 \cdot 10} = 3\sqrt{5 \cdot 10}$$

$$b) \sqrt{288k^3w^4e^5} = 144\sqrt{k^{1,5} \cdot w^2 \cdot e^{2,5}}$$

$$c) \sqrt{24a^2b} = 2a\sqrt{6b}$$

$$d) \sqrt[3]{40a^5b^4c^2} = 2ab \cdot \sqrt[3]{5a^2bc^2}$$

Multiplikation und Division von Wurzeln-gleicher Wurzelexponent

3.) Berechne ohne TR, vereinfache soweit als möglich, stelle in einfachster Form dar und rechne am Ende mit dem TR aus!

Leider ist Kebabsauce auf die Beispiele gespritzt.

Ergänze die fehlenden Komponenten der Ergebnisse

$$c) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{6} \right) : \sqrt{\frac{4}{81}} = \sqrt[3]{2 \cdot \dots} = \sqrt{\dots} = 2, \dots \quad d) \sqrt[5]{2x^6} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^4}{64}} = \sqrt[5]{\frac{x}{5}} = \frac{x^2}{\dots}$$

$$e) \sqrt[6]{\frac{y^2}{x^5}} \cdot \sqrt[6]{16y^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{4y}{x}} = \frac{y}{\dots}$$

$$f) \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{27}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{9}} = \frac{\dots}{3} \quad g) \sqrt[3]{\frac{ab}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2x}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3bx}{xb}} = \sqrt[3]{\dots} =$$

$$h) \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{8}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \dots$$

**Multiplikation und Division von Wurzeln-
verschiedene Wurzelexponenten**

4.) Berechne ohne TR, vereinfache soweit als möglich, stelle in einfachster Form dar und rechne am Ende mit dem TR aus!

Ergänze die Ergebnisse!

$$\text{a) } \frac{\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[6]{\frac{4}{5}}} =$$

$$\text{b) } \left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[6]{40} \right) : \sqrt{\frac{2}{5}} =$$

$$\text{b.1) } \frac{\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt[6]{75}} =$$

Potenzieren

5.) Berechne ohne TR, vereinfache soweit als möglich, stelle in einfachster Form dar und rechne am Ende mit dem TR aus!

Ergänze die Ergebnisse!

$$\text{a) } \left(\sqrt[3]{8} \right)^2 =$$

$$\text{b) } \left(\sqrt[3]{27x^6y^2} \right)^2 =$$

$$\text{c) } \left(\sqrt[6]{2} \right)^3 =$$

Rationalmachen des Nenners

6.)

Stelle mit rationalem Nenner, d.h. mit **wurzelfreiem Nenner** dar!

Berechne ohne TR, vereinfache soweit als möglich, stelle in einfachster Form dar und rechne am Ende mit dem TR aus

Ordne die korrekten Ergebnisse unten dem Beispiel jeweils richtig zu!

a) $\frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

b) $\frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$

c) $\frac{22\sqrt{5}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

d) $\frac{b^2 - 7}{b + \sqrt{7}} =$

e) $\frac{a - 4}{\sqrt{a} - 2} =$

f) $\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{7}} =$

g) $\frac{2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} =$

h) $\frac{5\sqrt{14}}{7\sqrt{2} + 2\sqrt{7}} =$

$$\frac{20 - 5\sqrt{21}}{5} = 4 - \sqrt{21} = -0.58257....$$

$$b - \sqrt{7} = b - 2.64575....$$

$$\frac{22\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{3} + \sqrt{5})}{22} = 3\sqrt{15} + 5 = 16.6189....$$

$$5 - \sqrt{21} = 0.4174...$$

$$\sqrt{a} + 2$$

$$\frac{70\sqrt{7} - 70\sqrt{2}}{70} = \sqrt{7} - \sqrt{2} = 1.23153.....$$

$$\sqrt{15} = 3.8729$$

$$\sqrt{15} = 3.8729$$

Lösungen

Rechnen mit Wurzeln

Partielles Wurzelziehen- Unter die Wurzel bringen

1)

Falsche Aussagen sind eingerahmt und bereits richtiggestellt!!!!

Wahre Aussagen (Richtiges) bleiben unverändert stehen.

$$I-0) \quad 14\sqrt{5} = \sqrt{980}$$

$$I-1) \quad 6h\sqrt{8} = \sqrt{288h^2}$$

$$I-1-1) \quad \boxed{17e^2 f^3 \sqrt{3} = \sqrt{867e^4 f^6}}$$

$$I-2) \quad \boxed{9\sqrt{5g^2} = \sqrt{405g^2} = 9g\sqrt{5}}$$

$$I-3) \quad 14\sqrt{5} = \sqrt{980}$$

$$I-4) \quad 4 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{320}$$

$$I-5) \quad 11m^2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3993m^6} = \sqrt[3]{(11m^2)^3 \cdot 3}$$

$$a) \quad 4x\sqrt{3y} = \sqrt{48x^2y}$$

$$b) \quad 4\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{16} = 2.5198$$

$$c) \quad \boxed{\frac{4}{7} \cdot \sqrt{\frac{49}{2}}} = \boxed{\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.828}$$

$$d) \quad \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{27}{100}} = \sqrt{\frac{3}{100}} = 0,1732$$

2.) Wurde richtig gedacht und gerechnet??? Überprüfe die einzelnen Schritte!!!!

Ziehe partiell die Wurzel, ohne den Taschenrechner zur Hilfe zu nehmen

$$1-0) \sqrt{2700} = \sqrt{3 \cdot 900} = 30\sqrt{3} = 51,9615... = \quad \mathbf{X \text{ richtig}}$$

1-1) $\sqrt{450} = \sqrt{45 \cdot 10}$ -> beide Faktoren unter der Wurzel sind keine Quadratzahlen, ich kann die Wurzel daher nicht partiell ziehen!!

falsch es muss anders zerlegt werden

$$\sqrt{450} = \sqrt{45 \cdot 10} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{750} &= \sqrt{75 \cdot 10} = \sqrt{3 \cdot 25 \cdot 10} = 3\sqrt{5 \cdot 10} \quad \mathbf{falsch} \\ \sqrt{750} &= \sqrt{75 \cdot 10} = \sqrt{3 \cdot 25 \cdot 10} = 5\sqrt{3 \cdot 10} = 5\sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{288k^3w^4e^5} = 144\sqrt{k^{1,5} \cdot w^2 \cdot e^{2,5}} \quad \mathbf{falsch}$$

Hochzahlen der Radikanden werden nicht einfach halbiert, 144 wurde falsch vor die Wurzel gezogen und alle Potenzen und Variable vor der Wurzel fehlen

$$\sqrt{288k^3w^4e^5} = \sqrt{2 \cdot 144 \cdot k^3 \cdot w^4 \cdot e^5} = 12kw^2\sqrt{2k \cdot e^4 \cdot e} = 12kw^2e^2\sqrt{2k \cdot e}$$

$$\text{c) } \sqrt{24a^2b} = 2a\sqrt{6b} \quad \mathbf{X \text{ richtig}}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{40a^5b^4c^2} = 2ab \cdot \sqrt[3]{5a^2bc^2} \quad \mathbf{X \text{ richtig}}$$

Multiplikation und Division von Wurzeln-gleicher Wurzelexponent

3.) Berechne ohne TR, vereinfache soweit als möglich, stelle in einfachster Form dar und rechne am Ende mit dem TR aus!

Ergänze die fehlenden Komponenten der Ergebnisse

Hier alle kompletten Ergänzungen:

$$c) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{6} \right) : \sqrt{\frac{4}{81}} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt{6} = 2,4494.. \quad d) \sqrt[5]{2x^6} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^4}{64}} = \sqrt[5]{\frac{x^{10}}{2^5}} = \frac{x^2}{2}$$

$$e) \sqrt[6]{\frac{y^2}{x^5}} \cdot \sqrt[6]{16y^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{4y}{x}} = \frac{2y}{x}$$

$$f) \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{27}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$g) \sqrt[3]{\frac{ab}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2x}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3bx}{xb}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$h) \sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{8}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{3}{2}$$

$$4.) a) \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[3]{3} = 1.732$$

$$b) \sqrt[6]{(3 \cdot 5)^2} = \sqrt[3]{15} = 2,466212..$$

$$b.1) \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[3]{5} = 2.236...$$

$$5.) a) 4$$

$$b) 9x^4y \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$c) \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} = 1.4142.....$$

6.) Die richtigen Zuordnungen sind:

$$a) \sqrt{15} = 3.8729$$

$$b) \sqrt{15} = 3.8729$$

$$c) \frac{22\sqrt{5} \cdot (3\sqrt{3} + \sqrt{5})}{22} = 3\sqrt{15} + 5 = 16.6189....$$

$$d) b - \sqrt{7} = b - 2.64575....$$

$$e) \sqrt{a} + 2$$

$$f) \frac{20 - 5\sqrt{21}}{5} = 4 - \sqrt{21} = -0.58257....$$

$$g) 5 - \sqrt{21} = 0.4174...$$

$$h) \frac{70\sqrt{7} - 70\sqrt{2}}{70} = \sqrt{7} - \sqrt{2} = 1.23153.....$$

Wissenschili zu dieser Standardübungschili

Rechnen mit Wurzeln und Rechenregeln

1.) Multiplikation von Wurzeln

Typ1:

Multiplikation mit gleichem Wurzelexponent:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Gilt natürlich für mehrere Faktoren

Nach der Potenzregel

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

Sonderableitung aus **Typ1:**

ist ein Faktor bzw. ein Wurzelradikand eine **Potenz**

Typ1.1:

$$\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Unter die Wurzel bringen

$$12x\sqrt{8} = \sqrt{(12x)^2 \cdot 8} = \sqrt{144 \cdot 8x^2}$$

$$23\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{23^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{\dots}$$

Typ1.2:

Lesen wir die obige Formel von rechts nach links

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

Partielles (Teilweises) Wurzelziehen

$$\sqrt{250} = \sqrt{25 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$$

$$\sqrt[3]{270} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 10} = 3\sqrt[3]{10}$$

Typ2:

Multiplikation mit verschiedenen Wurzelexponenten

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

Bsp.: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{2} \rightarrow \text{siehe unten : ERHÖHEN} \rightarrow \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5}$

In Beispielen, um zum Ziel zu gelangen, wendet man folgendes an:

Typ2.1:

Erhöhen des Wurzelexponenten: „erweitern“

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Bsp.: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$

Es gibt auch das „Kürzen“, um Wurzeln zu vereinfachen:

Typ2.2:

Erniedrigen des Wurzelexponenten „kürzen“

$$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Bsp.: $\sqrt[8]{x^{16}} = \sqrt[2 \cdot 4]{x^{4 \cdot 4}} = \sqrt[2]{x^4}$

2.) Division von Wurzeln

Typ1:

Division mit gleichem Wurzelexponent

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{Bsp.: } \sqrt{28} : \sqrt{14} = \sqrt{\frac{28}{14}} = \sqrt{2}$$

Typ2:

Division mit verschiedenem Wurzelexponent

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b}$$

$$\text{Bsp.: } \sqrt[4]{5} : \sqrt{8} \rightarrow \text{Erhöhen siehe unten} \rightarrow \sqrt[8]{5^2} : \sqrt[8]{8^4} = \sqrt[8]{\frac{5^2}{8^4}}$$

Zu Typ2

In Beispielen, um zum Ziel zu gelangen wendet man folgendes an:

Erhöhen des Wurzelexponenten: „erweitern“

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

3.) Potenzieren von Wurzeln

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^r = \sqrt[n]{a^r}}$$

Wurzelexponent bleibt unverändert, nur Radikand wird potenziert

$$\left(\sqrt[4]{b}\right)^3 = \sqrt[4]{b^3}$$

4.) Rationalmachen des Nenners

Nenner **wurzelfrei** machen - Wurzel im Nenner wegbringen!!

Wurzel im Nenner ist "mathematisch unschön"

Mit einer Wurzel den Zähler und den Nenner *geschickt* erweitern

Nenner „wurzelfrei“ machen - nach der **3.binomischen Formel**: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

Addition und Subtraktion (Grundzüge)

Nur möglich, wenn alle Wurzeln gleich sind

$$\underline{7\sqrt{15} - 3\sqrt{15} + \sqrt{15} = (7 - 3 + 1)\sqrt{15} = 5\sqrt{15}}$$

In Angaben wie

$$\underline{2\sqrt{8} + 15\sqrt{18} - 9\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}$$

zuerst partiell die Wurzel ziehen, dann wie oben mit gleichen Wurzeln addieren & subtrahieren