Wissensleuchtturm UE-,3.&4.Klasse

Ein Wissensleuchtturm ist eine *abschließende Zusammenfassung des Stoffs einer Schulstufe* in Schwerpunkt-Übersichtsform am Ende/Anfang eines Blocks von Übungsleuchttürmen einer jeweiligen Klasse und beinhaltet reine Lerntheorie (oft mit Musterbeispielen zum Verständnis),welche in Querverbindung mit den Standards der Übungsleuchttürmen steht.

Zusätzliche Stoffgebiete werden in den Lösungen der Übungsleuchttürme stets ausführlich behandelt.

Ich notiere und erkläre nur *Stoffkapitel, die relevant für den „Rätselblock“* der Übungsleuchttürme sind und darin vorkommen!

Inhaltsverzeichnis

Wissensleuchtturm zu:→>

Wissensleuchtturm zu -> :

Wissensleuchtturm zu 014 bis 017- Potenzen zu Kompetenzen- passend zu Übungsleuchttürmen Nr. 018 und 019 !

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **001**

Die ganzen Zahlen Z
Darstellung auf dem Zahlenstrahl
Ordnen

Die ganzen Zahlen Z

Ordnen von ganzen Zahlen und Darstellung auf dem Zahlenstrahl

Die Menge **der ganzen Zahlen** wird mit Z bezeichnet.

Sie besteht aus folgenden Mengen-anders ausgedrückt: Teilmengen der ganzen Zahlen sind folgende Mengen:

1.) Menge der **Positiven ganzen Zahlen***:* *natürliche Zahlen größer Null* :

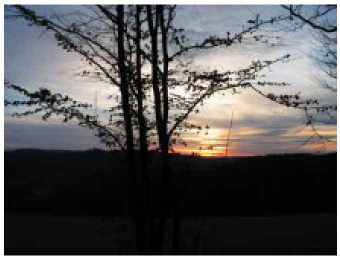
$1,2,3,4,5,6,7,......$

$Z^{+} = \{x \in Z / x > 0\}$ sprich: $\boxed{\{\ \}.......Mengenklammer}$

„Die Menge der positiven Zahlen **Z plus** besteht aus allen Zahlen/Elementen die

echt größer Null sind“

Achtung!!!! Null ist nicht enthalten!



2.) Menge der **Negativen ganzen Zahlen:**

$-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,......$ geordneter: $-7-6,-5,-4-3,-2,-1,......$

$Z^{+} = \{x \in Z / x < 0\}$

sprich:

„Die Menge der positiven Zahlen **Z minus** besteht aus allen Zahlen/Elementen die

echt kleiner Null sind“

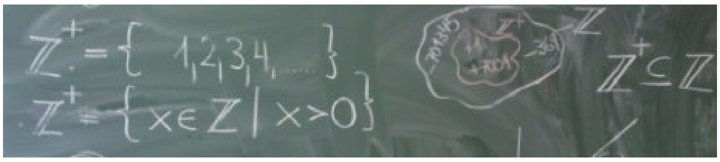
Achtung!!!! Null ist nicht enthalten!

und

3.) Null 0

Die Menge der ganzen Zahlen Z enthält also **Null sowie die positiven und negativen ganzen Zahlen.**

Die Mengenschreibweise ist: $Z = \{......-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,.........\}$



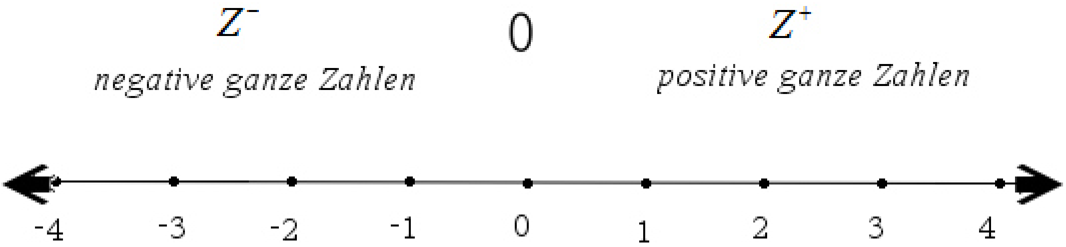
$$Z = \{......-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,.........\}$$

Beachte!!!! Setze unbedingt <u>die Punkte</u> links und rechts !!!! es gibt ja unendlich viele Elemente noch „auf beiden Seiten“

Ganze Zahlen insgesamt werden auf der **<u>Zahlengeraden</u>** am besten dargestellt.

(Eine Gerade deshalb, weil die Mengen in beide Richtungen unbegrenzt sind-also unendlich viele Elemente enthalten!)

Beachte: Stellen wir nur *positive* ganze Zahlen dar, liegt *<u>ein Zahlenstrahl</u>* vor ,da er ja in eine Richtung mit +1 (oder eventuell 0) endet!!! (dasselbe gilt für die negativen ganzen zahlen und -1)



In der Regel ist die Einheit 1 cm.

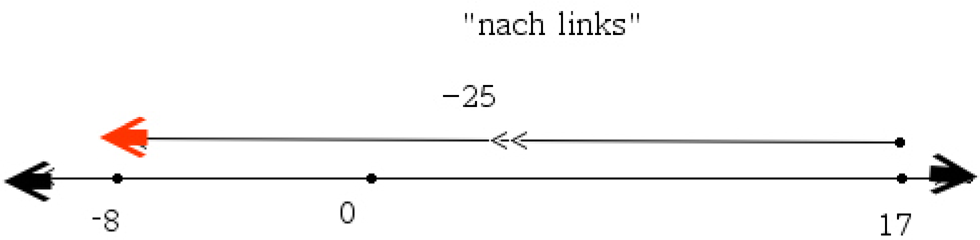
Die Zahlengerade wird als Erleichterung und Veranschaulichung zum Rechnen mit ganzen Zahlen verwendet, oft, wenn du dir nicht klar bist, wie viel du addieren oder subtrahieren musst etc.

„Links auf der Zahlengeraden sind immer die negativen ganzen Zahlen, rechts die positiven.

Je weiter wir nach links gehen, desto kleiner werden die Zahlen. Je weiter wir nach rechts gehen, desto größer werden die Zahlen“

Die entsprechende Rechnung wird immer mittels Pfeilen eingezeichnet.

Wollen wir z.B. wissen, 17-> -8 , zeichnen wir:



Die Rechnung lautet also: 17-25= -8 (oder -8 **+25** =17,weil wir ja „nach rechts“ gehen)

Auf der Zahlengeraden ist die Ordnung einheitlich und eindeutig festgelegt.

Musterbeispiel:

Ü ***Welche Zahlen sind mit der angegebenen Mengenschreibweise gemeint?***

Markiere diese Zahlen als Lösung auf dem Zahlenstrahl!

$\{x \in Z / -4 < x < +2\}$

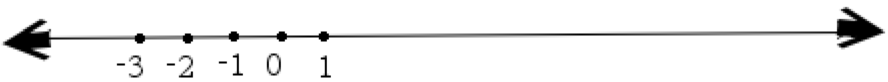
Übersetze die Angabe: *Beginne in der Mitte mit dem x nach links, dann nach rechts zu blicken. (bei einem Big Mac beginnst du auch in der „goldenen Mitte" zu essen).*

„x *echt größer als minus 4* und *echt kleiner als plus2.* $x > -4 \wedge (und)\ \ x < 2$

Die Lösung besteht aus allen ganzen Zahlen, die *echt größer als minus 4* sind , und *echt kleiner als plus2.*

Wir schreiben die ***Lösungsmenge*** *an:* $L = \{-3,-2,-1,0,1\}$.Wir sprechen vom <u>*aufzählenden Verfahren*</u>. Die Menge besitzt also (nur) <u>*endlich viele*</u> Elemente.

Daher kommen nur folgende Zahlen auf der Zahlengeraden in Betracht:



<u>**Beachte:**</u> Lautet die Angabe $\{x \in Z / -4 \leq x < +2\}$

so „ist die Zahl minus 4 bei <u>der Lösung dabei</u> ,weil es x größer gleich -4 heißt!!!!!

$L = \{-4,-3,-2,-1,0,1\}$

Übrigens: Eine Menge kann nicht nur mit Mengenklammern (aufzählendes Verfahren) aufgeschrieben werden, sondern auch graphisch als *Diagramm* gezeichnet werden

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

002 002-1

Rechnen in Z

Rechnen mit der Menge der ganzen Zahlen – Rechnen in Z

Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen

Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen

Um mit ganzen Zahlen rechnen zu können- also mit positiven und negativen Zahlen in der Menge Z zu rechnen, muss zunächst folgendes definiert werden:

Definition der ***Gegenzahl:***

$$+a \quad \rightarrow Gegenzahl: -a$$

$$-a \quad \rightarrow Gegenzahl: -(-a) = +a$$

Definition : der **Betrag** einer ganzen Zahl:

geometrisch: der Abstand der Zahl vom Nullpunkt auf dem Zahlenstrahl

$|+a| = +a \qquad |-a| = +a$ *Zahl und Gegenzahl haben denselben Betrag!!*

Bsp: $|+13| = +13 \quad |-99| = +99$

„Crash-Regeln"

Vorzeichen-Aufeinanderstoß-regeln

trifft ein Rechenzeichen auf ein Vorzeichen:

$$\underset{Rz}{+}\underset{Vz}{(+)} \rightarrow \underset{Rz}{+} \qquad \underset{Rz}{+}\underset{Vz}{(-)} \rightarrow \underset{Rz}{-} \qquad \underset{Rz}{-}\underset{Vz}{(+)} \rightarrow \underset{Rz}{-} \qquad \underset{Rz}{-}\underset{Vz}{(-)} \rightarrow \underset{Rz}{+}$$

Bsp: + (+14)= +14 + (-467)= -467 - (+888)= -888 - (-64)= +64

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

003

Multiplikation und Division in Z

1.) Multiplikation ganzer Zahlen

Bei der Multiplikation ganzer Zahlen musst du auf *die Multiplikationsregeln der jeweiligen Vorzeichen achten*.

Kurz notiert:

$+*+\to+$	$-*+\to-$	$+*-\to-$	$-*-\to+$	*Multiplikation*
$VzVz \quad Vz$	$VzVz \quad Vz$	$VzVz \quad Vz$	$VzVz \quad Vz$	

Dies bedeutet: Multiplizieren wir *zwei positive ganze Zahlen*, ist das Ergebnis wieder eine ***positive ganze Zahl.***

$+*+\to+$
$VzVz \quad Vz$ Bsp.: $(+7)\cdot(+13)=+91=7\cdot13=91$

Multiplizieren wir *eine negative ganze Zahl mit einer positiven*, ist das Ergebnis eine ***negative ganze Zahl.***

$-*+\to-$
$VzVz \quad Vz$ Bsp.: $(-7)\cdot(+23)=-161$

Multiplizieren wir eine *positive ganze Zahl mit einer negativen*, ist das Ergebnis eine ***negative ganze Zahl*.**

$+*-\to-$
$VzVz \quad Vz$ Bsp.: $(+4)\cdot(-13)=-52$

Multiplizieren wir *zwei negative ganze Zahlen* ist das Ergebnis eine ***positive ganze Zahl.***

$-*-\to+$
$VzVz \quad Vz$ Bsp.: $(-8)\cdot(-13)=+104=104$

Also nur bei „plus mal plus“ bleibt alles beim selben Vorzeichen!

Bemerkung:

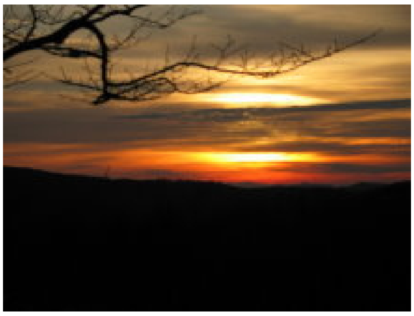
Natürlich gilt für die Multiplikation das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz) -nach den Rechengesetzen der 1.und 2.Klasse

$$(-7)\cdot(+23)=(+23)\cdot(-7)-161$$

Ein „Spezialfall“der Multiplikation: die Null

$0 \cdot jeder\ Zahl = 0$ $\quad jede\ Zahl \cdot 0 = 0$!!!!	(nach dem Vertauschungsgesetz)

Wird mit Null multipliziert, egal ob als 1.Faktor oder als 2.,ist das Ergebnis immer Null!



2.) Division ganzer Zahlen

Bei der Division ganzer Zahlen musst du auf die Divisionsregeln der jeweiligen Vorzeichen achten.

Es gelten dieselben Vorzeichenregeln wie bei der Multiplikation , nur eben mit dem Divisionszeichen (siehe 1.) !)

Kurz notiert:

Division:

$\underset{VzVz\quad Vz}{+:+\to+}$	$\underset{VzVz\quad Vz}{-:+\to-}$	$\underset{VzVz\quad Vz}{+:-\to-}$	$\underset{VzVz\quad Vz}{-:-\to+}$	*Division*

Dies bedeutet: Dividieren wir zwei positive ganze Zahlen, ist das Ergebnis wieder eine **positive ganze Zahl**.

$\underset{VzVz\quad Vz}{+:+\to+}$ Bsp.: $(+77):(+7)=+11=77:7=11$

Dividieren wir eine negative ganze Zahl durch eine positive, ist das Ergebnis eine **negative ganze Zahl.**

$\underset{VzVz\quad Vz}{-:+\to-}$ Bsp.: $(-93):(+31)=-3$

Dividieren wir eine positive ganze Zahl durch eine negative, ist das Ergebnis eine **negative ganze Zahl.**

$\underset{VzVz\quad Vz}{+:-\to-}$ Bsp.: $(+39):(-13)=-3 \qquad 99:(-33)=-3$

Dividieren wir *zwei negative ganze Zahlen*, ist das Ergebnis eine **positive ganze** Zahl.

$\underset{VzVz\quad Vz}{-:-\to+}$ Bsp.: $(-57):(-3)=+19=19$

Also nur bei „plus dividiert durch plus“ bleibt alles beim selben Vorzeichen!

Ein „Spezialfall“ der Division : die Null

$0 : jede\ Zahl = 0$

Dividieren wir Null durch eine Zahl, erhalten wir wieder Null als Ergebnis.

Aber:

$jede\ Zahl : 0 = "verboten"$!!!!

Wir dürfen keine ganze Zahl durch Null dividieren!!!!!

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

004 005

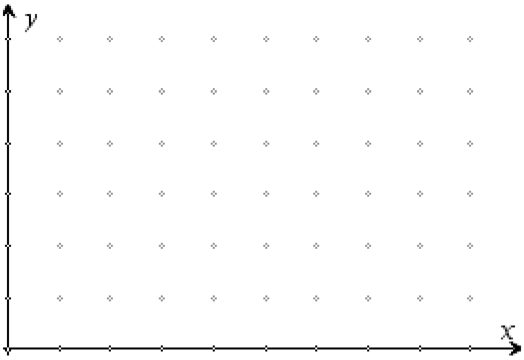
Geometrie:

Das rechtwinkelige Koordinatensystem

Erweiterung durch negative Koordinaten

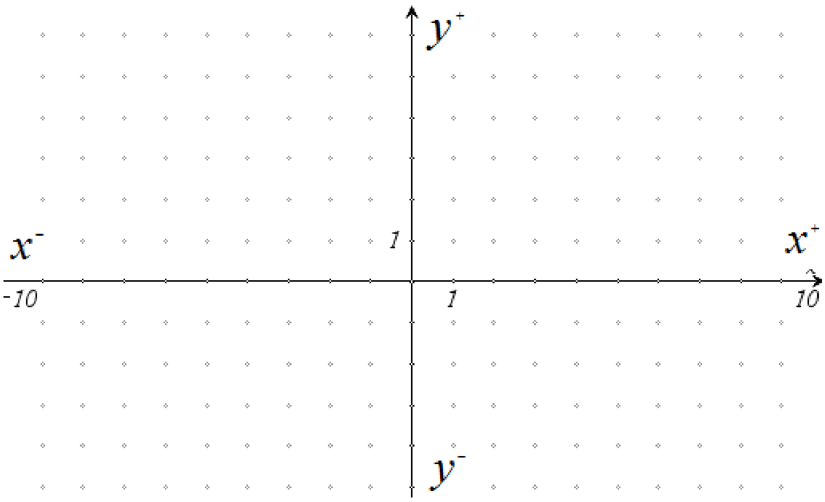
Teil 1 und 2

*Wir kennen bereits das **zweidimensionale** Koordinatensystem der Ebene, das wir bis jetzt ohne Kenntnis über die Menge der ganzen Zahlen (vor allem der negativen ganzen Zahlen!) zeichnen konnten. Es gibt nur 2 **positive Achsen***

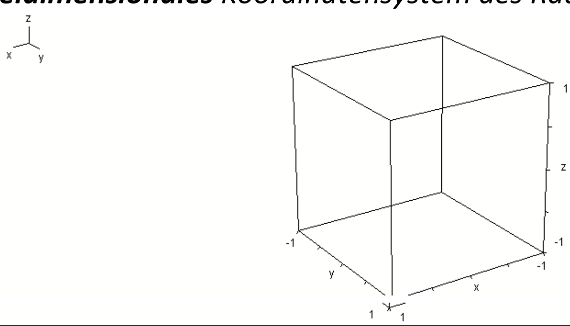


Statt x-und y-Achse könnten wir auch schreiben: $x^{+} sowie\ y^{+} Achse.$ *(nur positive Achsen!!)*

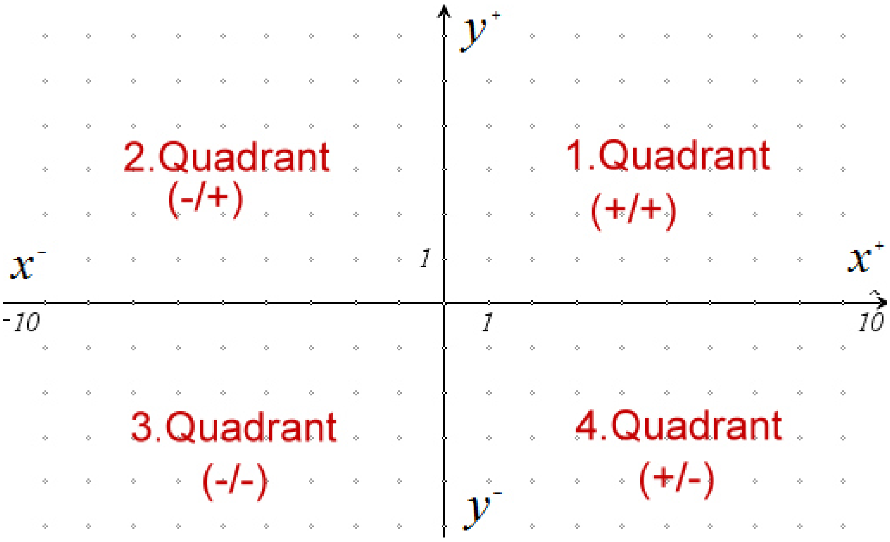
*Nun erweitern wir dieses zweidimensionale Koordinatensystem in Kenntnis der Menge Z mit **negativen** x-Koordinaten und y-Koordinaten. Es gibt nun eine* $x^{-} sowie\ y^{-}$ *-achse. Wir sprechen auch von einem sogenannten **„Koordinatenkreuz“***



*Später wirst du ein **dreidimensionales** Koordinatensystem des Raumes kennenlernen*



Die Koordinatenachsen des 2-dimensionalen.Koordinatensystems teilen die Zeichenebene in ***4 Quadranten. Beachte die Vorzeichen der Koordinaten!***



Die Beschriftung der Quadranten erfolgt ***stets gegen den Uhrzeigersinn!***

Die x-Achse heißt auch ***Abszisse****, die y-Achse* ***Ordinate***

Der Schnittpunkt der 4 Koordinatenachsen $P(0/0)$ *heißt* ***Nullpunkt oder Koordinatenursprung***

$P(-7/+3) \rightarrow$ *die erste Eintragung ist die* ***x-Koordinate*** *(hier also -7) und die zweite die* ***y-Koordinate*** *(hier also 3).Wir schreiben auch* $P(-7;+3) \rightarrow$ *ein Strichpunkt statt Querstrich*

Das positive Koordinatenvorzeichen muss nicht angeschrieben werden

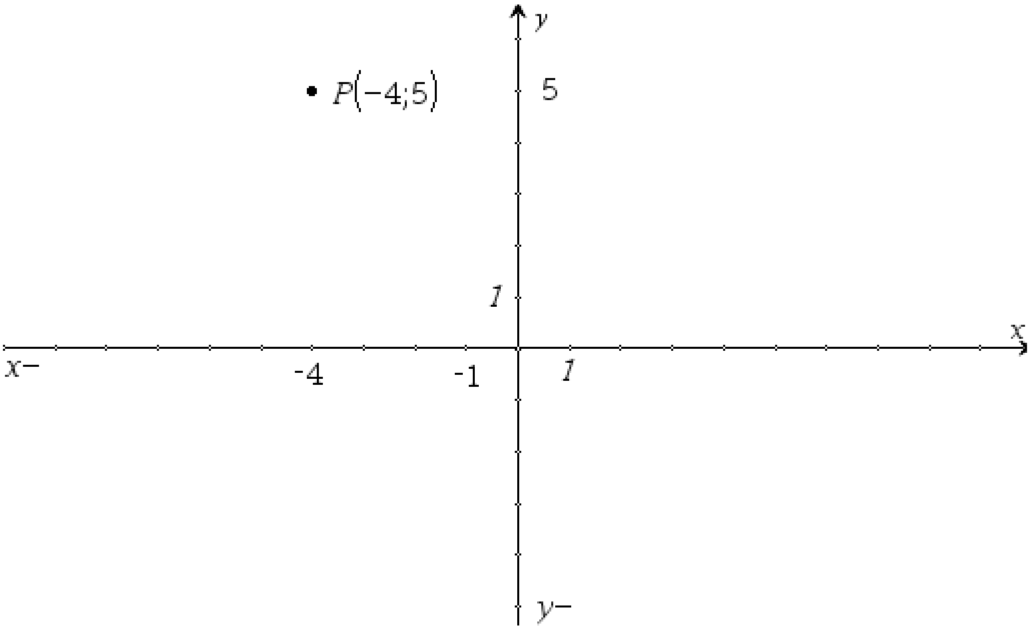
$P(+4/+5) \rightarrow \underline{P(4/5)}$

Betrachten wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes P.

$P\,(-4/5)$ →> *die erste Eintragung, also -4 ist die x-Koordinate. Sie ist in diesem Fall negativ.*

Wir müssen daher zunächst -4 auf der ***negativen x-Achse*** *nach links gehen.*

Die 2.Eintragung,also +5, ist die ***y-Koordinate****. Diese ist positiv. Wir müssen also von* $(-4/0)$ *,dem Punkt der genau auf der negativen x-Achse liegt, noch 5 in die positive y-Richtung hinauf wandern. Der Punkt liegt also im 2.Quadranten.*



Liegt ein Punkt direkt auf einer der 4 Koordinatenachsen, so hat er eine Koordinate stets **0.**

$P\,(0/-5) \rightarrow$ *Punkt liegt auf der* ***negativen y-Achse*** *x-Koordinate ist* ***0.***

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

006

Geometrie:

Die Spiegelung

Grundgedanken zum geometrischen Aspekt der Spiegelung:

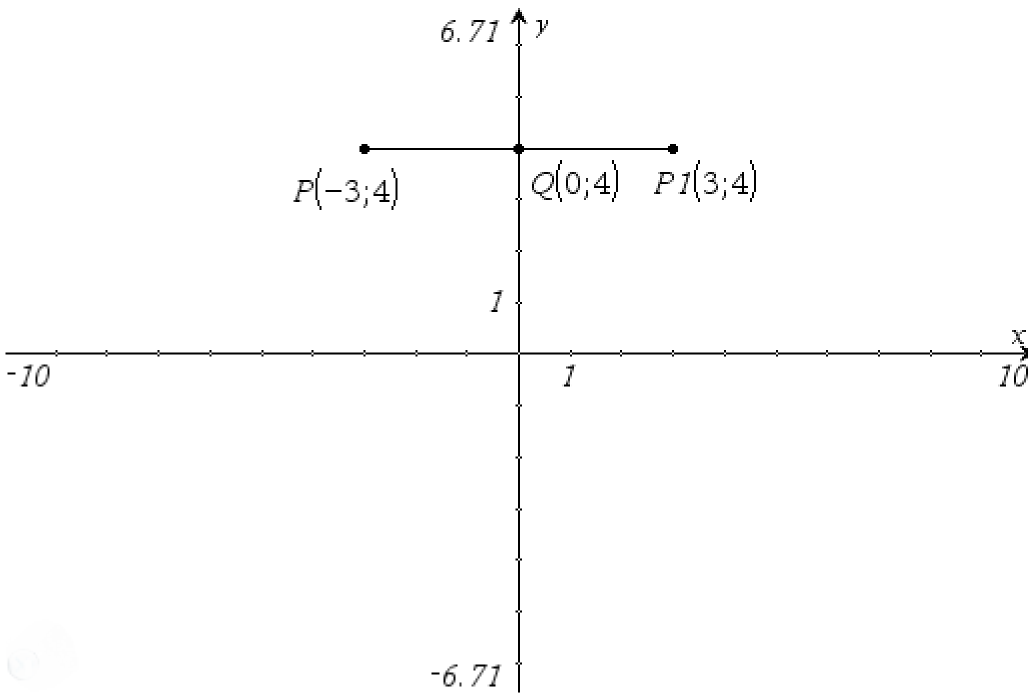
Wir zeichnen den Punkt $P\left(-3/4\right)$ *in das Koordinatensystem.*

Wir wollen den Punkt P an der y-Achse spiegeln. Der gespiegelte Punkt wird mit P_1 *bezeichnet. Die y-Achse ist also Spiegelungsachse. Die Verbindung von* $P \text{ zu } P_1$ *,also die Strecke* $\overline{PP_1}$ *steht normal auf die y-Achse. Q ist der Schnittpunkt der Normalen (Strecke* $\overline{PP_1}$ *) mit der y-Achse.*

Wir entnehmen der Konstruktion: Die Strecken $\overline{PQ}$ *und* $\overline{QP_1}$ *sind* ***gleich lang.***

Dies bedeutet, Q ist also der ***Mittelpunkt (Halbierungspunkt)*** *der Strecke* $\overline{PP_1}$ *.*

Der gespiegelte Punkt P_1 *hat die Koordinaten* $P_1\left(3/4\right)$*. Die y-Achse ist die* ***Streckensymmetrale*** *der Strecke* $\overline{PP_1}$ *.Im Dreieck werden wir sie* ***Seitensymmetrale*** *nennen.*



Ü1 (Musterbeispiel zur Nachkonstruktion)

Spiegle das Viereck ABCD an der Geraden g

$$Geg.: A(-6/-2)\ \ B(-4/-4{,}5)\ \ C(-3{,}5/-1{,}5)\ \ D(-1/-4{,}5)$$
$$g[(0/0),(3/-2)]$$

$(-3{,}5/-1{,}5)$

-3,5 -> 3cm 5mm auf der negativen x-Achse nach links; 1,5 auf der negativen y-Achse „hinunter“ (eine Gerade ist übrigens durch 2 Punkte eindeutig definiert!)

Konstruktionsgang des Ü1 (Spiegelung allgemein)

1.) Zeichne die Punkte A, B, C und D und verbinde sie zu einem Viereck

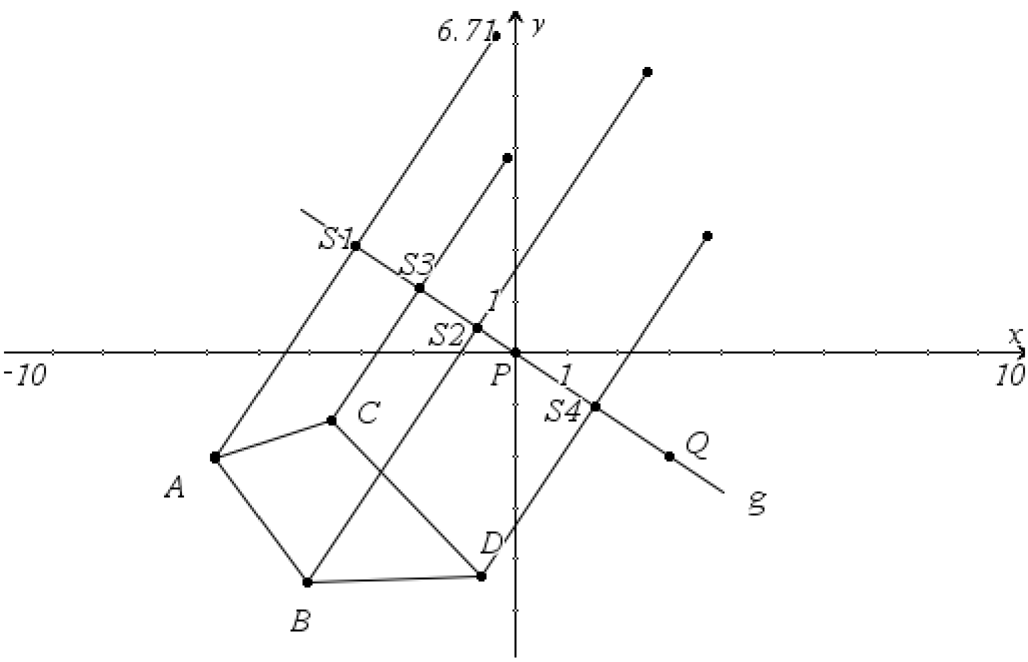
2.) Zeichne die Punkte P und Q und lege durch diese die Gerade g

3.) Lege auf g *normale Geraden (Linien)* durch alle Punkte A, B, C und D

4.) Stich mit dem Zirkel jeweils in den *Schnittpunkt der Normalen mit g* ein und nimm die Länge *vom Schnittpunkt zum Eckpunkt in den Zirkel* (z.B. $\overline{S_1A}$)

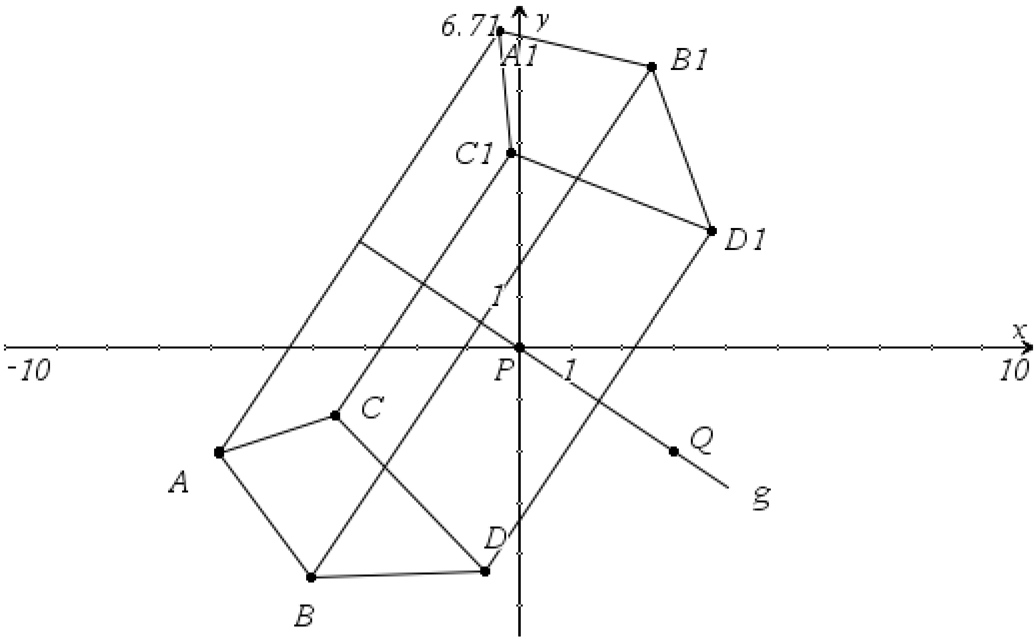
$S_1, S_2, S_3 und\ S_4$ ......Schnittpunkte der Normalen mit der Geraden g

5.) Diese Länge schlägst du nun auf der Hilfsgeraden *nach rechts „auf die andere Seite“ ab-* dies ergibt den gespiegelten Punkt.



6.) verbinde die in Schritt 5) entstandenen Punkte zu einer Figur –so erhältst du die

gespiegelte Figur $A_1B_1C_1D_1$



Die Gerade g heißt Symmetrieachse oder Spiegelachse.

Das Viereck $ABCD$ ist **kongruent (deckungsgleich)** zum Viereck $A_1B_1C_1D_1$.

Dies bedeutet: Würden wir die beiden Figuren ausschneiden so sind sie flächenmäßig gleich groß und wenn wir sie übereinander legen, so liegen sie genau Kante an Kante und ihre Eckpunkte exakt aufeinander.

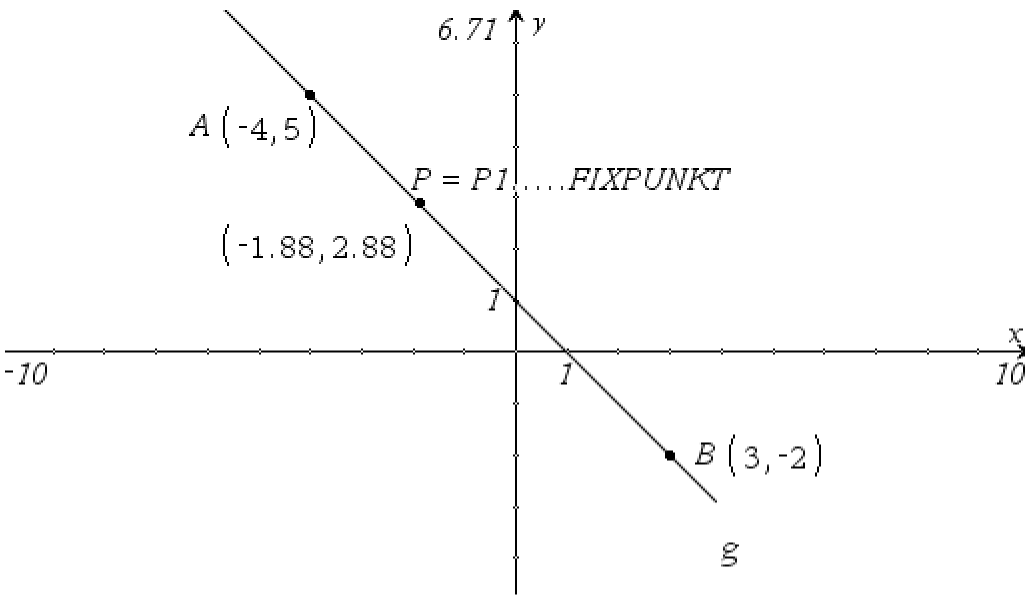
Was passiert bei einer Spiegelung mit einem Punkt der *auf der Achse selbst* liegt???

Dieser Punkt heißt dann **Fixpunkt.** $P = P_1$

Ein anschauliches Beispiel dazu:

Wir zeichnen die Punkte A und B ins Koordinatensystem und nehmen einen Punkt P, der auf der Geraden liegt. Wählen wir die Gerade g nun als Spiegelungsachse, so ist P Fixpunkt.

$P = P_1$ Spiegeln wir den Punkt A oder B an der Gerade g, gilt natürlich dasselbe.



Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

007 008

Geometrie:

Die besonderen sonderbaren Punkte im Dreieck

H,S,U und I im erweiterten Koordinatensystem

Teil 1 Lückentext

Teil 2-Konstruktion

Die besonderen sonderbaren Punkte im Dreieck

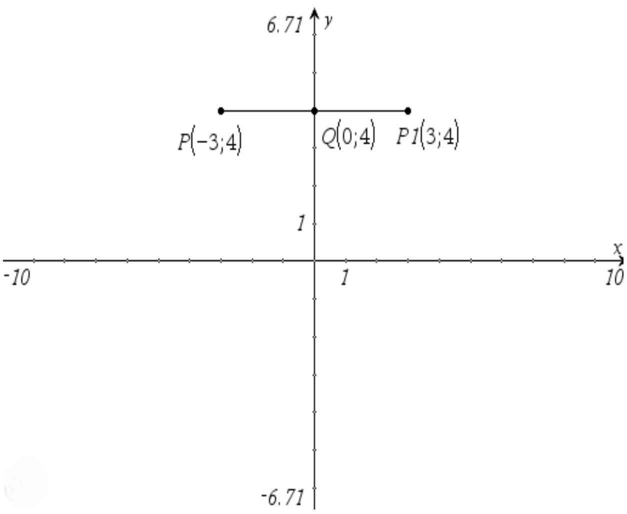
1 U Der Umkreismittelpunkt-Umkreis

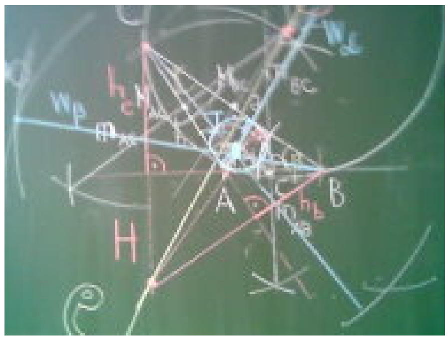
Zeichnen wir auf alle Dreiecksseiten jeweils eine **Streckensymmetrale**- sie werden im Dreieck **Seitensymmetralen** genannt- so erhalten wir durch deren Schnitt die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U.

Die Konstruktion der Streckensymmetrale entspricht in folgendem Sinne der Spiegelung unserer vorherigen Wissenschili, die die unten angeführte Graphik nochmals veranschaulicht

*Q ist der **Mittelpunkt (Halbierungspunkt)** der Strecke* $\overline{PP_1}$.

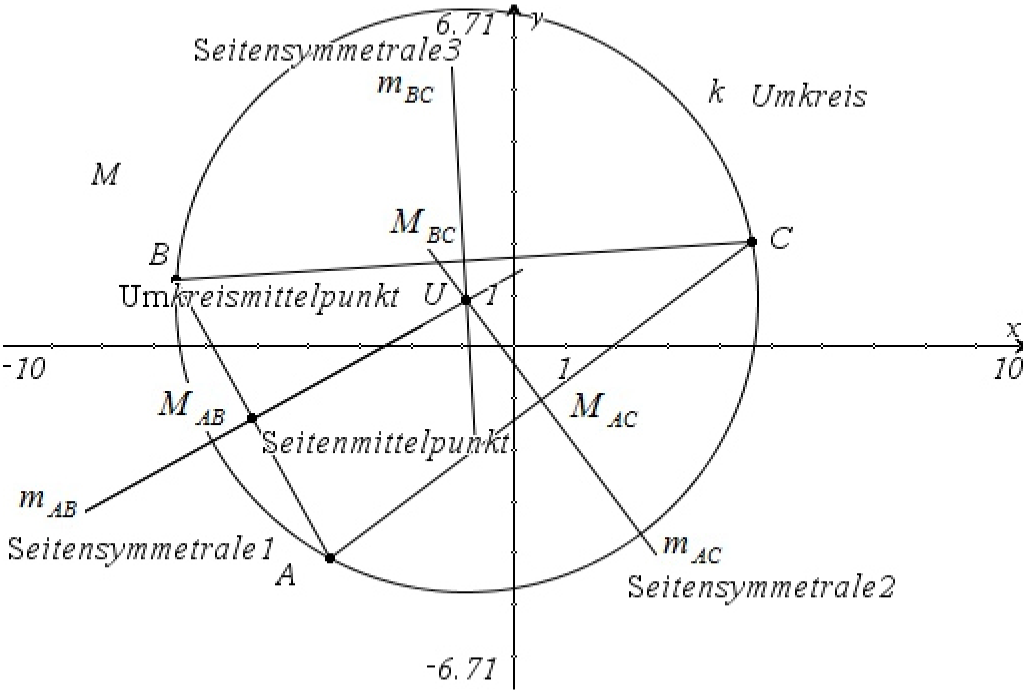
*Die y-Achse ist die **Streckensymmetrale** der Strecke* $\overline{PP_1}$ *.Im Dreieck werden wir sie **Seitensymmetrale** nennen.*





Tafelkonstruktion der Eulerschen Geraden e

Hier sei nun als Veranschaulichung eine Konstruktion eines Umkreismittelpunkts und Umkreises (im spitzwinkeligen Dreieck) ausgeführt:



M_{AB}......*Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB* M_{AC}........*Mittelpunkt der Seite AC*
M_{BC}.......*Mittelpunkt der Seite BC*

U........Umkreismittelpunkt

m_{AB}.......*Seitensymmetrale auf die Seite AB(c) durch den Mittelpunkt der Seite* M_{AB}
m_{AC}.........*Seitensymmetrale auf dieSeite AC(b)durch denMittelpunktder Seite* M_{AC}
m_{BC}..........*Seitensymmetrale auf dieSeite BC(a) durch den Mittelpunktder Seite* M_{BC}

Stichst du in U ein und zeichnest du den Kreis durch alle 3 Eckpunkte des Dreiecks , hast du den Umkreis k konstruiert. **Der Radius des Umkreises** ist : $\boxed{r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}}$

Merke: Die Seitensymmetrale steht normal auf die Dreiecksseite und verläuft durch den Mittelpunkt der Seite. (und steht in diesem normal). Sie verläuft (im Allgemeinen) **nicht** durch den *gegenüberliegenden Eckpunkt* (wäre Zufall!)

Der Umkreismittelpunkt U liegt beim **spitzwinkeligen Dreieck innerhalb** ,

beim **stumpfwinkeligen** Dreieck **außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkeligen Dreieck ist er der Mittelpunkt der Hypotenuse.

2 H Der Höhenschnittpunkt

Die Höhe ist eine ***Normale*** *auf die Dreiecksseite durch den* *gegenüberliegenden Eckpunkt.*

Die Höhe wird auch Höhenlinie genannt. Höhe bedeutet eigentlich eine begrenzte Länge ,

Höhenlinie die verlängerte Gerade. In der Praxis wird aber eigentlich nicht unterschieden.

Der Schnitt der 3 Höhen(-linien) in einem Punkt ergibt den ***Höhenschittpunkt H.***

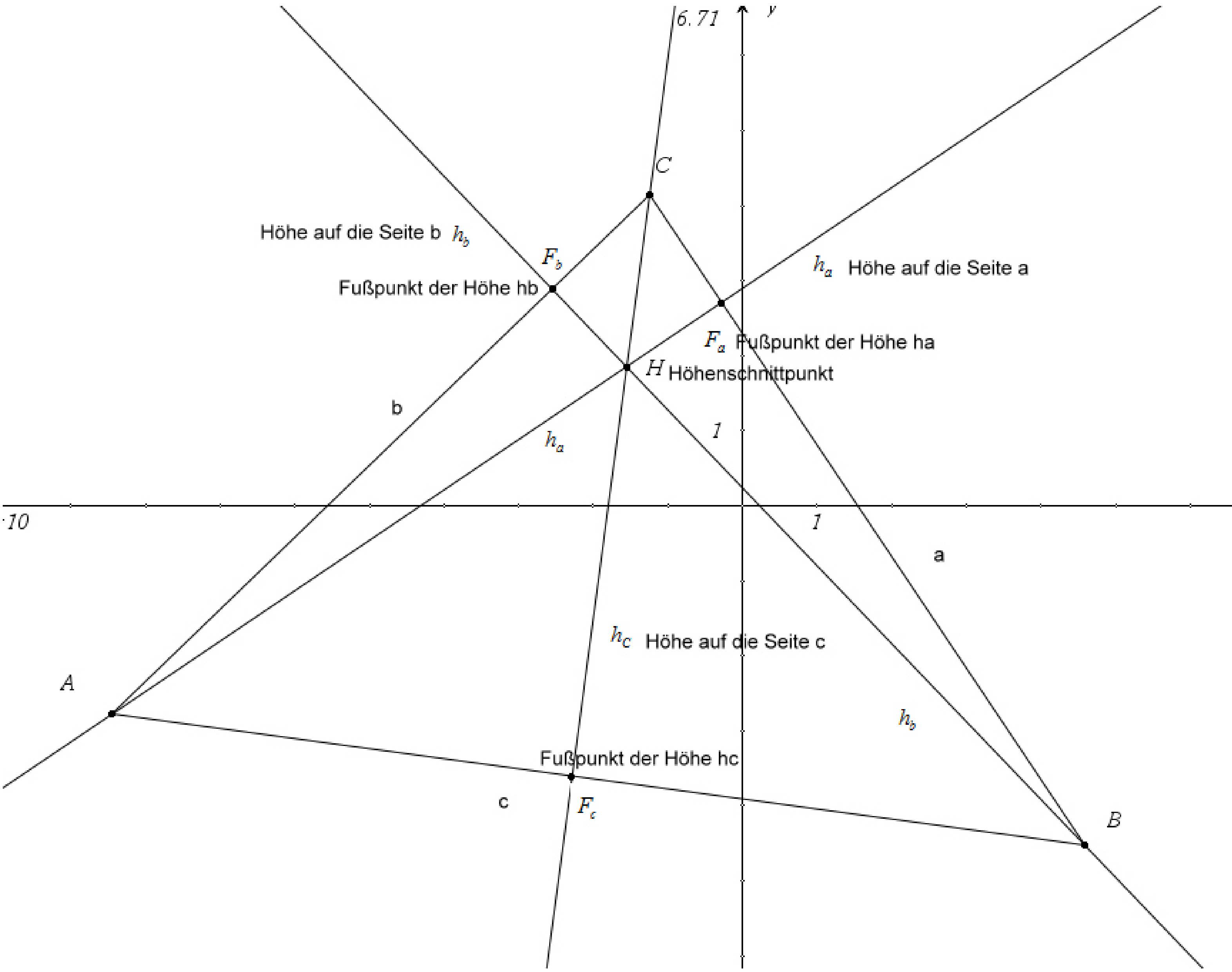
Konstruktionsgang für die Höhe:

Lege das Geodreieck **normal auf eine Seite** an (Nulllinie auf der Seite wie auf der Abbildung unten!) und ziehe eine Linie (=Normale) **durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.**

Merke: Der Höhenschnittpunkt H liegt beim **spitzwinkeligen Dreieck innerhalb** ,

beim **stumpfwinkeligen außerhalb der Dreiecksfläche**.

Beim rechtwinkeligen Dreieck ist er der Scheitel des rechten Winkels



Zeichne immer das Symbol des rechten Winkels im Schnitt der Höhen mit den Seiten ein!

F_a......*Fußpunkt der Höhe* h_a *aufdie Seite* a = *Schnittpunkt derHöhe* h_a *mitderSeite* a

F_b......*Fußpunkt der Höhe* h_b *aufdieSeite* b = *Schnittpunktder Höhe* h_b *mitder Seite* b

F_c......*Fußpunkt der Höhe* h_c *aufdieSeite* c = *Schnittpunktder Höhe* h_c *mitder Seite* c

H.........Höhenschnittpunkt

h_c.......*Höhe auf die Seite AB* (c) *(durch den Eckpunkt C)*

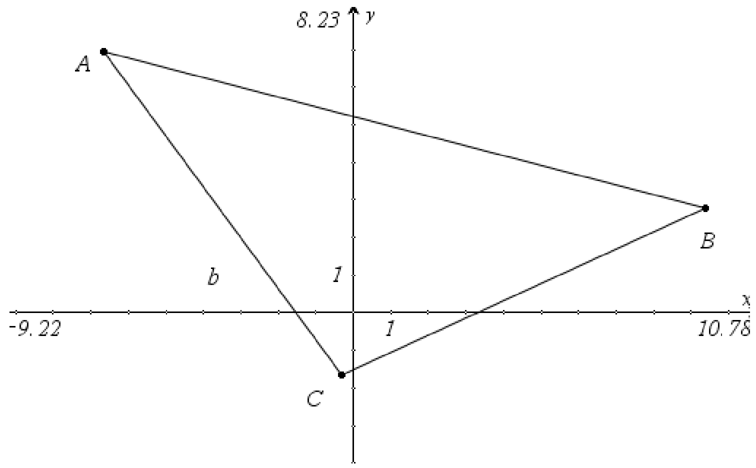
h_a.......*Höhe auf die Seite BC* (a) *(durch den Eckpunkt A)*

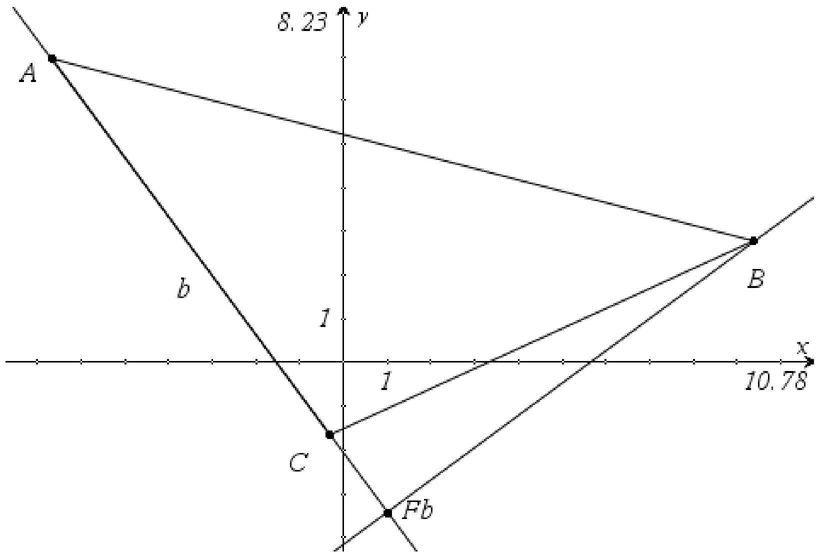
h_b.......*Höhe auf die Seite AC* (b) *(durch den Eckpunkt B)*

Bemerkung

Beachte beim Einzeichnen der Höhen- also Legen der Normale auf eine Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt im **stumpfwinkeligen Dreieck**: du musst die Seite oft über *einen Eckpunkt hinaus* verlängern um die Normale =Höhenlinie zeichnen zu können

Ein anschauliches Beispiel: die Länge der Seite b reicht hier nicht, um die Höhe h_b durch den Eckpunkt B legen zu können.





Du musst die Verlängerung der Linie über den Eckpunkt C hinaus zeichnen, also letzten Endes die Strecke $\overline{F_bC}$ *.* *Durch den Höhenfußpunkt* F_b wird die Normale auf b durch B gelegt.

Genauso gehst du bei der Konstruktion von h_a vor.

Erfahrungsgemäß habe ich beobachtet, dass viele SchülerInnen im stumpfwinkeligen Dreieck nicht wissen, wo sie die Normale anlegen sollen, "da die Linie nicht da ist, um durch den gegenüberliegenden Eckpunkt die Normale zu legen……."!

Daher: Übung macht den/die MeisterIN!!!

3 S Der Schwerpunkt

Die Schwerlinie ist die Verbindung vom Mittelpunkt einer Dreiecksseite zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

*Der Schnitt der 3 Schwerlinien in einem Punkt ergibt den **Schwerpunkt S .***

Er liegt stets innerhalb des Dreiecks!

***Die Schwerlinie steht nicht normal** auf die Dreiecksseite!*

Konstruktionsgang für die Schwerlinie

1.) Halbiere die Seite des Dreiecks mittels Streckensymmetrale (siehe Unterkapitel 1.):"Umkreismittelpunkt" sowie Veranschaulichung im nächsten Absatz)
Du erhältst den Mittelpunkt der Dreiecksseite.

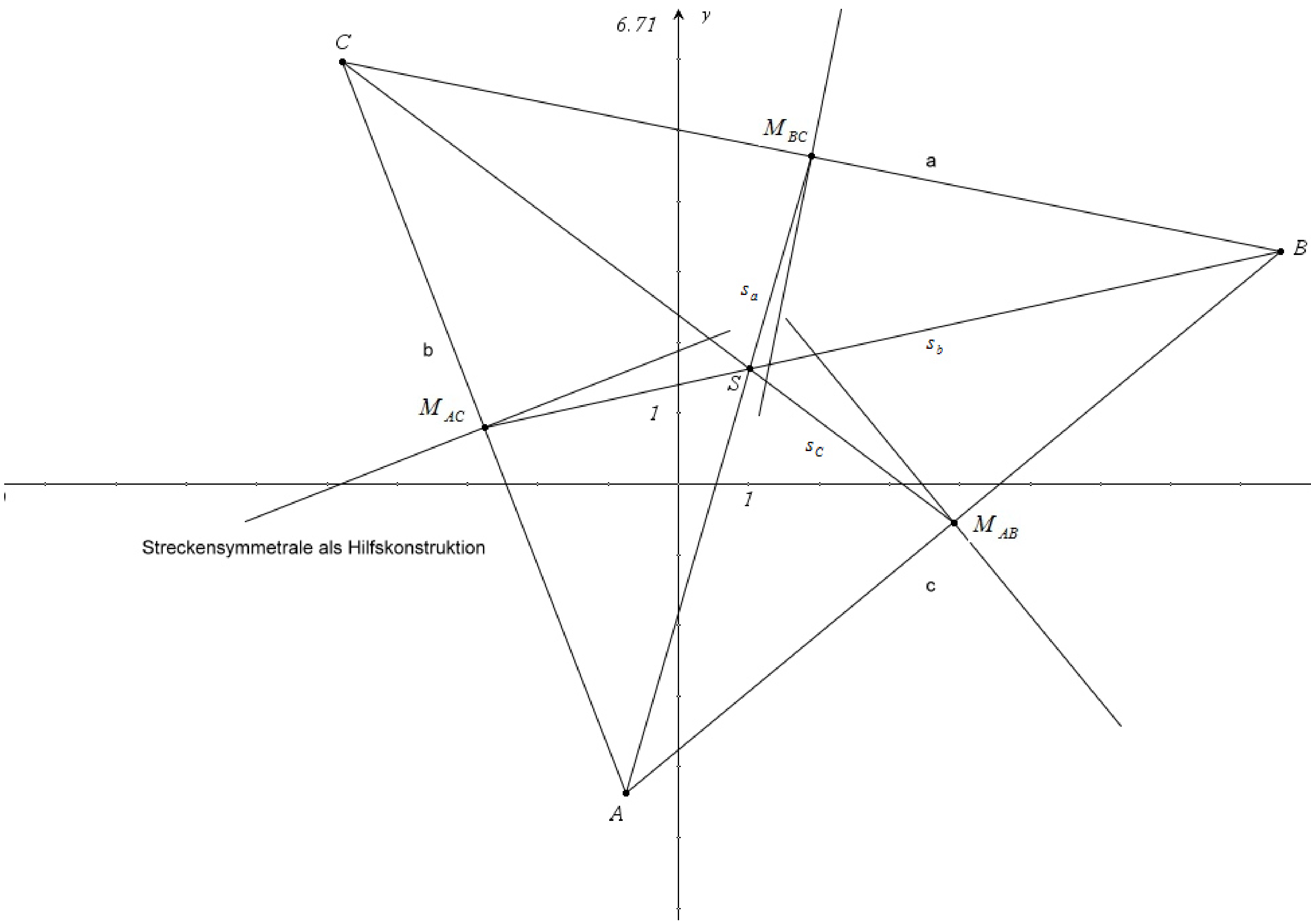
(zeichne eine nicht all zu lange Normale->also nicht über die Seite schneidend hinaus)

2.) ziehe eine Linie vom *Mittelpunkt* zum *gegenüberliegenden Eckpunkt*

Ein paar Bemerkungen dazu im nächsten Absatz (Veranschaulichung)

Bei der Konstruktion der Schwerlinie selbst gibt es keine Normale, sie ist nur die Verbindung zwischen 2 speziellen Punkten, eine Normale wird nur bei der Konstruktion des Mittelpunkts als Punktermittlung als Hilfslinie gelegt!!!

Merke: **H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.**



M_{AB}......*Mittelpunkt der Seite (Seitenmittelpunkt) AB* M_{AC}........*Mittelpunkt der Seite AC*

M_{BC}.......*Mittelpunkt der Seite BC*

s_a.........*Schwerlinie auf die Seite a* $=$ *Strecke* $\overline{M_{BC}A}$

s_b.........*Schwerlinie auf die Seite b* $=$ *Strecke* $\overline{M_{AC}B}$

s_C...........*Schwerlinie auf die Seite c* $=$ *Strecke* $\overline{M_{AB}C}$

4 Der Inkreismittelpunkt

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der 3 ***Winkelsymmetralen.***

Er liegt immer *innerhalb* der Dreiecksfläche!

Der Inkreis berührt die 3 Dreiecksseiten „von innen“ in den *3 Berührpunkten der Seiten mit dem Inkreis.*

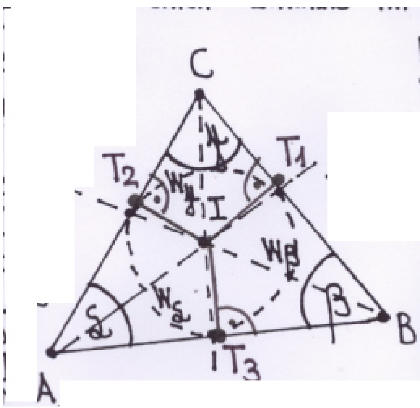
Die Winkelsymmetralen **halbieren** die Winkel, aber die *dem Winkel gegenüberliegenden* Seite im *Allgemeinen nicht und stehen auch nicht auf diese normal!!!!*

Willst du den ***Radius des Inkreises*** ρ *(Rho) konstruieren so ziehst du Normale auf die Dreiecksseiten zum Inkreismittelpunkt I. Der jeweilige Schnittpunkt der Normalen mit der Dreiecksseite wird* ***Berührpunkt des Inkreises*** *genannt. Es gibt also* ***3 Berührpunkte*** *des Inkreises im Dreieck:* T_1, T_2 *und* T_3 *!*

In A ist der Winkel α *(Alpha)*

In B ist der Winkel β *(Beta)*

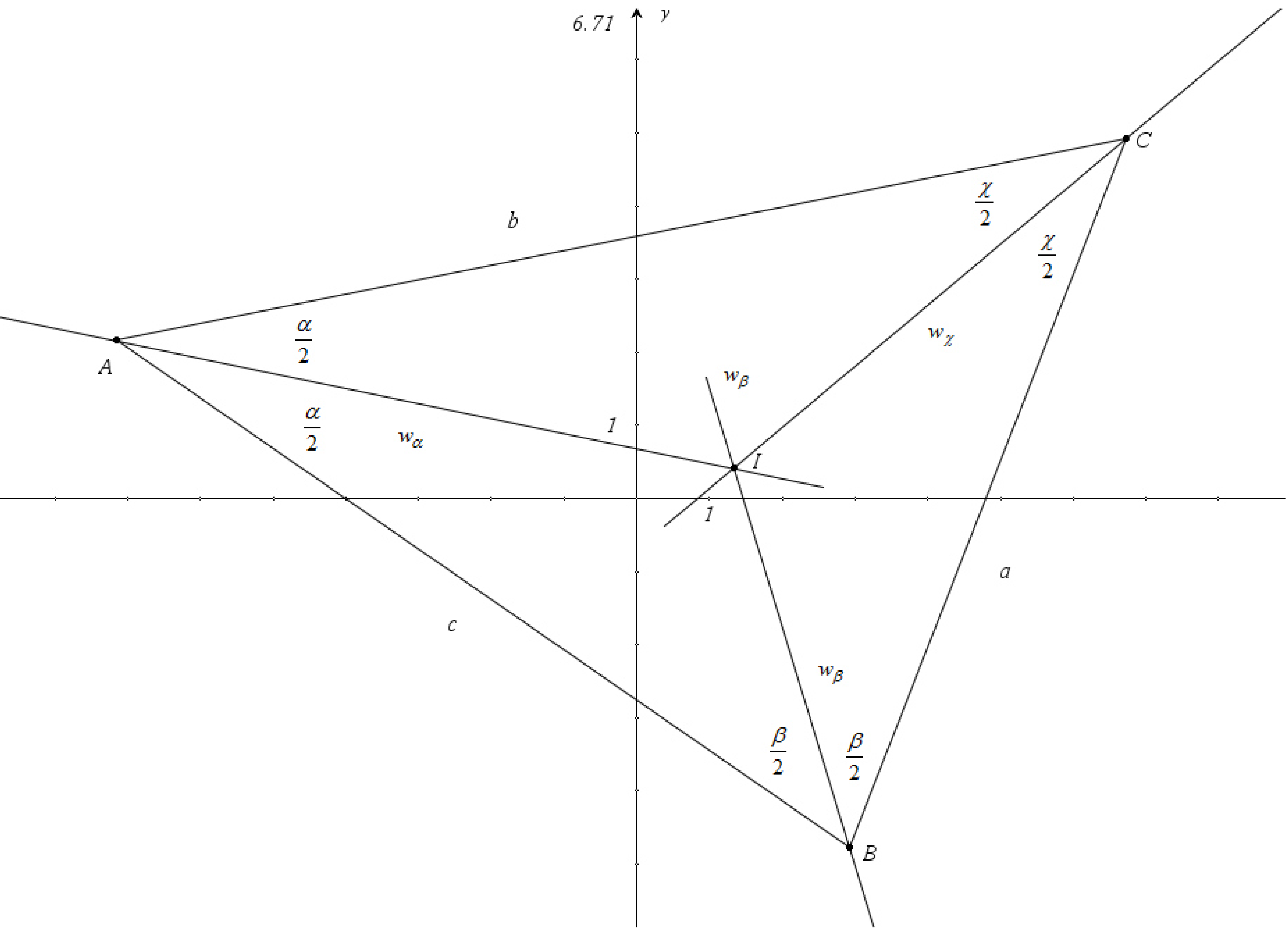
In C ist der Winkel χ *(Gamma)*



Der Inkreis darf nie über eine Dreiecksseite hinausgehen!!!

Passe daher zuerst mit dem Zirkel deinen Kreis in den 3 Seitenberührpunkten an ,bevor du ihn durchziehst!!!

Merke: **H, S und U liegen auf der Eulerschen Geraden e, jedoch nicht I.**



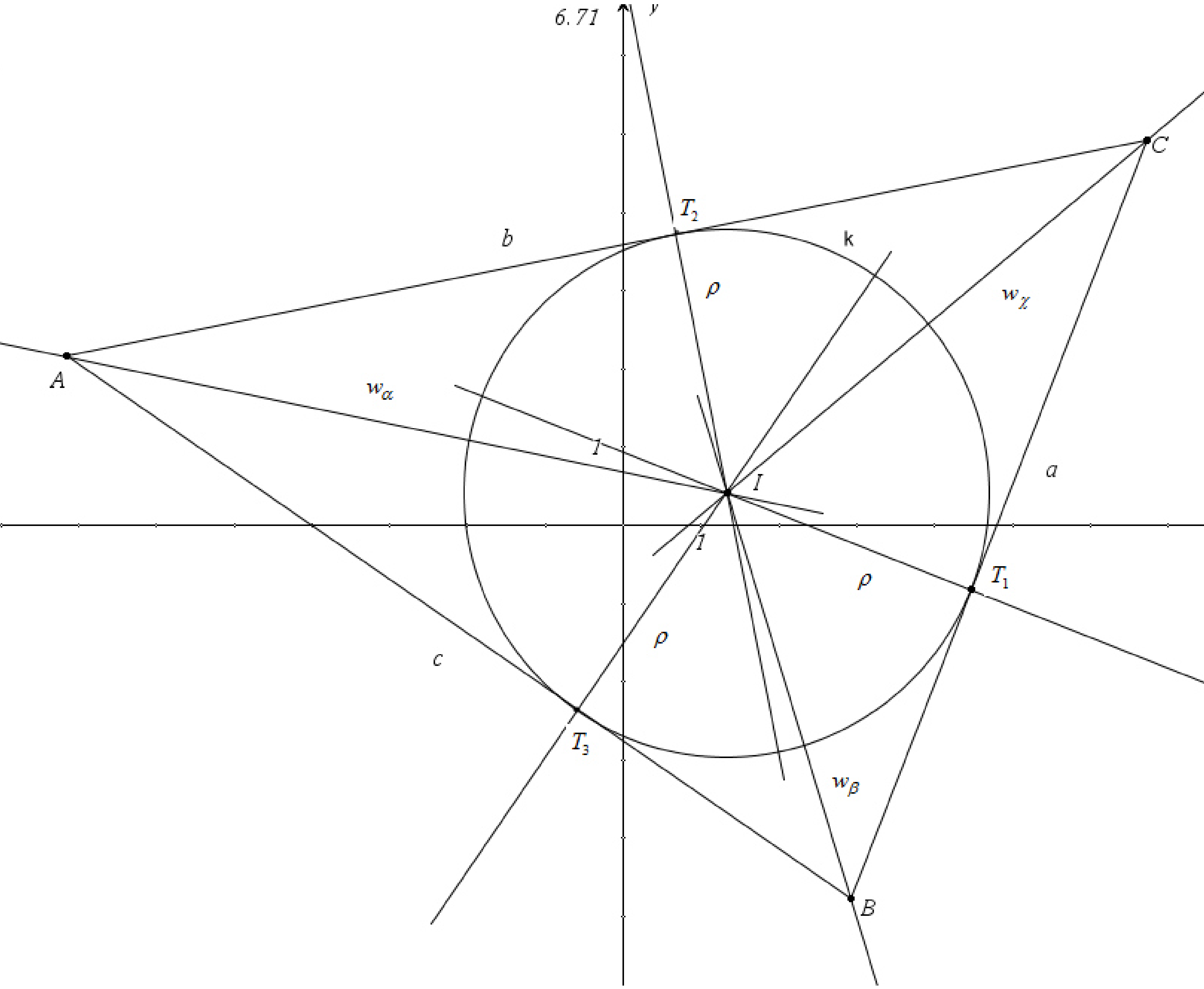
w_α.......*Winkelsymmetrale des Winkels* α w_β..........*Winkelsymmetrale des Winkels* β

w_γ..........*Winkelsymmetrale des Winkels* γ

Die Winkelsymmetralen ***<u>halbieren also die 3Winkel</u>***

T_1.......*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite a* T_2........*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite b*
T_3........*Berührpunkt des Inkreises mit derSeite c*

ρ......*RHO.....Radius des Inkreises*
I.......*Inkreismittelpunkt*



Die Eulersche Gerade e

Die Eulersche Gerade, benannt nach dem berühmten Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler*, verläuft durch die 3 besonderen Punkte U,H und S in jedem Dreieck, egal ob dieses stumpf-,spitz-oder rechtwinkelig, gleichschenkelig, gleichseitig….. ist.

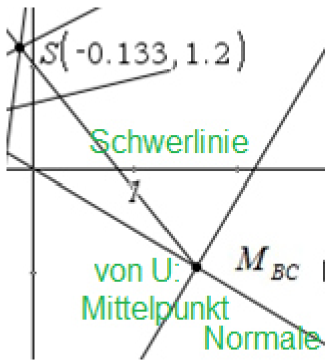
Sie verläuft **<u>nicht</u>** durch den **Inkreismittelpunkt I !!!!!!!!**

Merke dir:

eUler**S**c**H**e Gerade - >es kommt kein „I" im Text vor

<u>**Überlege:**</u> *(->>siehe Abbildung)*

Konstruierst du zuerst den Umkreismittelpunkt, hast du bereits den Mittelpunkt der Seiten mit der Normalen bestimmt und hast somit für den Schwerpunkt die Verbindungspunkte.



Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

009 009-1

Rechnen mit rationalen Zahlen-Rechnen in Q

Rechnen mit Brüchen

Die Menge der rationalen Zahlen Q

Rationale Zahlen -die Brüche

Bruchrechnung

Auffrischen der Begriffe aus der 1.und 2.Klasse

Wiederholung der „Grundtechniken“ der Bruchrechnung

Übungsbeispiele

Rechnen mit rationalen Zahlen-Rechnen in Q

Die Menge der rationalen Zahlen Q

Das praktische Rechnen in unserer „neuen“ Zahlenmenge der **rationalen Zahlen Q** wird das Rechnen mit *Brüchen und Dezimalzahlen* mit Umwandeln eines Bruchs in eine Dezimalzahl und Dezimalzahl in einen Bruch sein.

In unseren vorigen geometrischen Wissensleuchttürmen hatten wir bereits Koordinaten mit Kommazahlen „Komma 5“-(die ja auch als Bruchzahlen darstellbar wären) . Wir „bewegten“ uns also bereits in der Zahlenmenge Q.

Hatten wir etwa als x-Koordinate die Dezimalzahl: $3{,}5 = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ als Bruch!

Beide Elemente, Bruch und Dezimalzahl sind ein Element aus der Zahlenmenge der rationalen Zahlen Q.

Wir wissen: jeder Bruch lässt sich als Dezimalzahl schreiben und umgekehrt.

Beispiele: $\frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad 3{,}7 = 3\frac{7}{10}$

Jede Division lässt sich als Bruch schreiben. Der Bruchstrich ist ein Divisionszeichen . (siehe nächstes Kapitel)

Wir überlegen:

Beispiel: $\frac{+39}{-13} = \frac{-39}{+13} = -\frac{39}{13} = -3 \qquad \frac{-26}{-13} = \frac{+26}{+13} = \frac{26}{13} = +2$

Allgemein: $\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b} \quad b \neq 0 \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \quad b \neq 0$

-Diese Regeln gelten aufgrund der Vorzeichenregeln für $+ : - = -$ also für die Division

>siehe „Wissenschili: *Rechnen mit ganzen Zahlen“*

Definition: Eine Zahl, die *als Bruch zweier ganzer Zahlen* (und damit auch als Dezimalzahl) geschrieben werden kann (egal ,welche Vorzeichen in Zähler und Nenner auftreten),heißt **rationale Zahl.**

Beispiele für rationale Zahlen:

$$Bsp: \quad 137\frac{7}{31} \qquad -16789587{,}234001 \qquad -\frac{9}{79} \qquad 88889.99 \qquad 7\frac{3}{22} \qquad \frac{6}{32}$$

Die Frage stellt sich nun, warum wir überhaupt „schon wieder" eine *neue Menge Q* neben der „bisherigen" Menge Z einführen müssen.

Addition, Subtraktion und Multiplikation sind immer in Z ausführbar

Beispiele: $(+9)+(+17)=+26 \in Z$ $\qquad (-39)-(-17)=+56 \in Z$

$$(+6)\cdot(-33)=-192 \in Z$$

Aber: Die Division ist *nicht immer in Z ausführbar:*

Es gilt zwar: $(+39):(-13)=-3 \in Z$ aber: $(+39):(-23)=-\frac{39}{23} \notin Z$

Um sie uneingeschränkt durchführen zu können, muss die Menge der rationalen Zahlen Q eingeführt werden!!!!!

Die Menge Q enthält neben den **ganzen Zahlen Z noch alle *Bruchzahlen und alle endlichen sowie periodischen Dezimalzahlen***

$$\boxed{Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in Z \, und \, b \neq 0\right\}}$$

Q^- .....**negative rationale Zahlen**

$$Bsp: -77\frac{8}{9} \qquad -2346754.9856664 \qquad -\frac{8}{19} \qquad -\frac{7}{9}$$

Q^+ **.....positive rationale Zahlen**

$$Bsp: 89.99 \qquad 6\frac{11}{13} \qquad \frac{9}{19} \qquad \frac{12}{99}$$

$6\frac{11}{13}$ wird **gemischte Zahl** genannt. (->Ganze und ein Bruch)

Die Beziehung der 3 Mengen zueinander, die wir bis jetzt kennengelernt haben, kann recht anschaulich in einem so genannten **Mengendiagramm** dargestellt werden.

(siehe auch Wissensleuchtturm zur mathematischen Sprache. Dort hatten wir als größte Menge die Menge der reellen Zahlen, R, auch dazu genommen/definiert.)

„Lesen wir das Mengendiagramm - von der kleinsten Menge zur größten (also von innen nach außen):“

Die natürlichen Zahlen N sind eine **Teilmenge** von den ganzen Zahlen Z , die ganzen Zahlen Z eine Teilmenge der rationalen Zahlen Q.

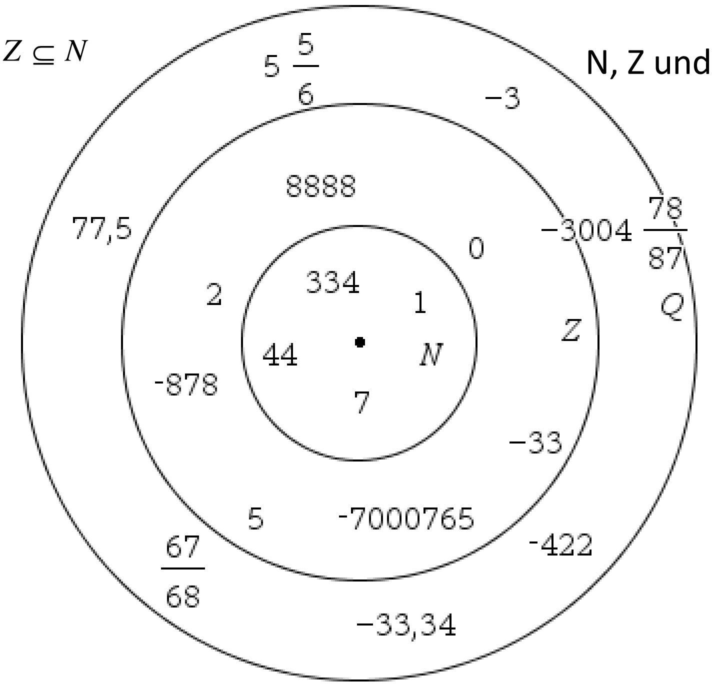
$N \subseteq Z \subseteq Q$

„Lesen wir das Mengendiagramm in die andere Richtung- von der größten Menge zur kleinsten (also von außen nach innen):“

Die ganzen Zahlen Z sind eine **Obermenge** von den natürlichen Zahlen N, die rationalen Zahlen Q sind eine Obermenge von den ganzen Zahlen Z.

$Q \subseteq Z \subseteq N$

N, Z und Q sind[1] **(Zahlen-) mengen**!



In der Graphik haben wir Beispiele für rationale Zahlen mit deren richtiger Zuordnung zu den Mengen eingezeichnet.

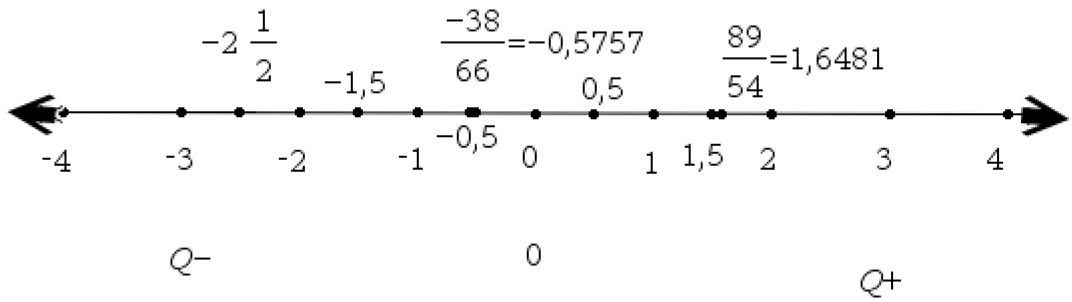
Beachte: z.B.: $-33{,}34 \in Q$ $\quad -878 \notin Q$ $\quad 44 \notin Q$

z.B.: $-33{,}34 \in Q$ $\quad -33{,}34 \notin Z$ $\quad -33{,}34 \notin N$

-> aber: z.B.: $7 \in N$ $\quad 7 \in Z$ $\quad 7 \in Q$!!!!!!!!!

Rationale Zahlen werden wie ganze Zahlen auf der **Zahlengeraden** dargestellt.

(Eine Gerade deshalb, weil die Mengen in beide Richtungen unbegrenzt sind-also unendlich viele Elemente enthalten!)



Wir haben auf der Zahlengeraden verschiedene rationale Zahlen als Beispiel zur Größenorientierung eingezeichnet. $-2\frac{1}{2}, -1{,}5, \ -\frac{38}{66}, \ \frac{89}{54}$

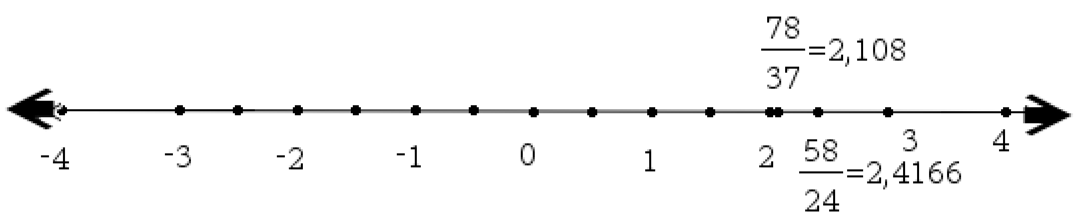
In Q gilt dieselbe Ordnung wie in Z !! $-2\frac{1}{2} < -\frac{38}{66}, \quad \frac{89}{54} > 0{,}5$ etc. Wir können also genau unterscheiden, welches Element *größer oder kleiner ist.*

Zwischen 2 beliebigen rationalen Zahlen *gibt es <u>unendlich viele</u> weitere rationale Zahlen!!*

Wir sagen: rationale Zahlen *liegen dicht* auf der Zahlengeraden

Wollen wir z.B. alle Zahlen zwischen $\frac{78}{37}$ und $\frac{58}{24}$ darstellen, müssten wir unendlich viele Punkte zwischen den beiden Elementen auf der Zahlengeraden zeichnen.

Wir zeichnen einmal die beiden Dezimalzahlen (Brüche) ein:

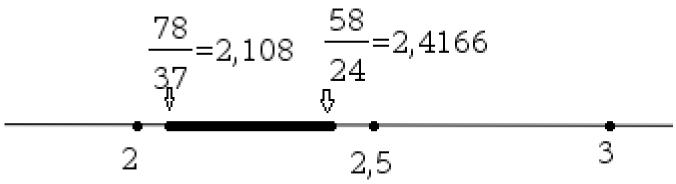


Es liegen ja zwischen 2 Elementen wieder unendlich viele.

Wir setzen daher eine *dicke Linie.*

„Zoom“:

∞



unendlich viele

Wir können nicht alle rationalen Zahlen die zwischen den beiden Zahlen $\frac{78}{37}$ und $\frac{58}{24}$ liegen, aufzählen.

In unserem Beispiel können wir diese Zahlen so aufschreiben:

$$\left\{ x \in Z \,/\, \frac{78}{37} \leq x \leq \frac{58}{24} \right\}$$

Sprich: Die Menge aller x, (also rationaler Zahlen), die größer gleich $\frac{78}{37}$,aber kleiner gleich $\frac{58}{24}$ sind. (es sind unendlich viele!)

Rationale Zahlen -die Brüche

Bruchrechnung

Wir wollen, bevor wir die Regeln für das Rechnen mit den 4 Grundrechenoperationen mit Brüchen definieren, unsere Kenntnisse der Bruchrechnung kurz auffrischen:

Für die Grundbegriffe rechnen wir im Folgenden nur in der Menge Q^+, also mit positiven rationalen Zahlen.

Wichtige Regeln-allgemein:

Ein Bruch besteht aus: $\frac{Z\ddot{a}hler}{Nenner} -> Bruchstrich \quad ist\ ein\ "Dividiert"-Zeichen$

1.) **Kürzen**

Zähler **UND** Nenner **durch dieselbe Zahl** (oder Variable) **dividieren**

Bsp: $\frac{8^{:8}}{16^{:8}} = \frac{1}{2}$

-> wir haben sowohl den **Zähler** (die Zahl *ober* dem Bruchstrich) als auch den **Nenner** (die Zahl *unter* dem Bruchstrich) durch 8 –die *größtmögliche* zu dividierende Zahl, sodass in Zähler und Nenner eine ganze Zahl bleibt- dividiert.

Schrittweise: $\frac{8^{:2}}{16^{:2}} = \frac{4^{:2}}{8^{:2}} = \frac{2^{:2}}{4^{:2}} = \frac{1}{2}$

Beim Kürzen wird sowohl Zähler als auch Nenner schief durchgestrichen. Später schreibst du die Zahl, durch die du dividierst , meist nicht mehr dazu.

Wir kürzen immer soweit als möglich*!!!!!(bis wir also die kleinstmöglichen Zahlen in Zähler und Nenner haben!!)*

somewhere over the rainbow…

Musterbeispiel zur Bestimmung des ggT (größten gemeinsamen Teilers) als Wiederholung

(um jene gemeinsame Zahl von Zähler und Nenner zu finden,durch die wir **kürzen** *können.)*

Wir wollen $\frac{36}{54}$ ***kürzen. Wir suchen ggT (36,54)*** *. Wir zerlegen 36 und 54 in Primfaktoren.*

36	2	54	2
18	2	27	3
9	3	9	3
3	3	3	3
1		1	

Oben: *Wir vergleichen jeweils die beiden rechten roten Spalten (also die Divisoren) in beiden Zerlegungen links und rechts.*
1.Schritt : wir beginnen mit dem ersten roten 2er in der linken Zerlegung. Er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. (siehe unten) In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett.
Der 2er wird nur einmal gezählt.

36	2	54	2
18	2	27	3
9	3	9	3
3	3	3	3
1		1	

2.Schritt : wir gehen weiter in der linken Zerlegung. Der nächste 2er kommt nirgendwo mehr vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Oben markieren wir ihn hellblau.

3.Schritt : wie schon im 1.Schritt gehen wir bei den beiden 3ern vor. Oben markieren wir die beiden 3er in der linken Zerlegung grün ,die beiden 3er in der rechten Zerlegung wie im 1.Schritt violett.

Übrig bleibt nun (nur)ein 3er in der rechten Spalte der rechten Zerlegung (rot markiert).Er kommt nicht (mehr) doppelt vor ,daher wird er stehen gelassen.

Übrig bleibt nun ein 2-er und zwei 3-er in der linken Zerlegung-rechte Spalte*. (grün!!)*

Bilden wir das Produkt aus diesen übrig gebliebenen grünen Zahlen ,so erhalten wir die Faktoren des ggT.

$$\boxed{ggT\,(36{,}54) = 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2 = 18}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 36 und 54 ist also,wie bereits mit den Mengen gezeigt, 18!

Der größte gemeinsame Teiler ist das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren.

„Alle Zahlen, die doppelt vorkommen=alle Primfaktoren in der Zerlegung, werden nur 1mal multipliziert angeschrieben.“

Musterbeispiel

Kürze den folgenden Bruch soweit als möglich! möglich (wenn es möglich ist!!) $\frac{80}{88}$

Wende für die Zahl durch die du kürzen kannst, die Bestimmung des ggT an!

Wir versuchen zunächst schrittweise zu kürzen. Dies wird länger dauern als den ggT für die >Kürzzahl zu bestimmen. Der Pfeil zeigt an, durch welche Zahl wir gerade dividiert haben.

$$\frac{80 \rightarrow :2}{88 \rightarrow :2} = \frac{40 \rightarrow :2}{44 \rightarrow :2} = \frac{20 \rightarrow :2}{22 \rightarrow :2} = \frac{10}{11}$$

Multiplizieren wir alle 3 Divisoren, erhalten wir $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Wir hätten also gleich durch 8 kürzen können. Wir wenden die Teilbarkeitsregel für 8 an.

$$\frac{80 \rightarrow :8}{88 \rightarrow :8} = \frac{10}{11}$$

Am sichersten ist es, wenn wir von Zähler und Nenner den ggT bestimmen.

Wir suchen also ggT (80,88). Vermutlich wird es 8 sein.

Wir zerlegen 80 und 88 in Primfaktoren.

80	**2**	88	**2**
40	**2**	44	**2**
20	**2**	22	**2**
10	**2**	11	**11**
5	5	1	

$$ggT(80,88) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Wir erhalten also 8 als größtmögliche Zahl, durch die wir kürzen können.

$$\frac{80 \rightarrow :8}{88 \rightarrow :8} = \frac{10}{11}$$

Mit dem ggT haben wir also dieselbe Lösung erhalten.

Musterbeispiel

Kürzen gemischter Zahlen

Kürze $13\frac{87}{228}$ ***soweit als möglich wenn möglich***

Bei gemischten Zahlen „lassen wir die ganze Zahl stehen, wie sie ist“ und kürzen „nur“ den Bruch.

$$13\frac{87 \rightarrow :3}{228 \rightarrow :3} = 13\frac{29}{76}$$

Stelle dir gemischte Zahlen so vor:

$$13\frac{87}{228} = 13 + \frac{87 \rightarrow :3.}{228 \rightarrow :3} = 13 + \frac{29}{76} = 13\frac{29}{76}$$

Versuchen wir nun wieder die Kürzzahl mit dem ggT zu finden:

87	3
29	29
1	1
1	

228	2
114	2
57	3
19	19
1	

$ggT(87,228) = 3$

Wir erhalten also 3 als größtmögliche Zahl, durch die wir kürzen können. $13\frac{87 \rightarrow :3}{228 \rightarrow :3} = 13\frac{29}{76}$

Der 13-er bleibt stehen.

Als Probe könnten wir die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, (siehe folgendes Kurzkapitel! Umwandeln: unechter Bruch→gemischte Zahl) dann kürzen und schließlich wieder den „neuen Bruch“ in eine gemischte Zahl umwandeln.

$$13\frac{87}{228} = \frac{3051 \rightarrow :3}{228 \rightarrow :3} = \frac{1017}{76} = 13\frac{29}{76}$$

2.) Erweitern

Zähler **UND** Nenner **mit derselben Zahl** (oder Variablen) **multiplizieren**

Bsp: $\frac{3^{\bullet 8}}{8^{\bullet 8}} = \frac{24}{64}$

wir haben sowohl den **Zähler** (die Zahl *ober* dem Bruchstrich) als auch den **Nenner** (die Zahl *unter* dem Bruchstrich) mit 8 multipliziert.

*Die Zahl mit der erweitert wird, ist meist beliebig, hängt aber oft davon ab,wie diese beim **Bringen auf einen gemeinsamen Nenner** lauten soll.*

Manchmal ist auch der Nenner angegeben (oder der Zähler),auf den der Bruch gebracht werden soll.

Probe, ob richtig erweitert wurde:

Wir kürzen: $\frac{24 \rightarrow : 8}{64 \rightarrow : 8} = \frac{3}{8}$

Wir haben wieder die Ausgangszahlen in Nenner und Zähler erhalten, also jenen Bruch, mit dem wir „gestartet sind“

Kürzen ist also die Umkehr (das Gegenteil) des Erweiterns, Erweitern jene des Kürzens.

Unechter Bruch: der Zähler ist *größer* als der Nenner

Bsp: $\frac{93}{8}$, $\frac{7}{4}$ kann stets als ***gemischte Zahl*** geschrieben werden! $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

Echter Bruch: der Zähler ist *kleiner* als der Nenner

Bsp: $\frac{93}{94}$, $\frac{3}{4}$

Erweitern gemischter Zahlen
Muster-Ü

1.) Erweitere den Bruch *mit der* ***angegebenen Zahl.***

Führe 2.) erst durch, wenn du 1.) fertig hast

2.) Kürze eventuell gleich den Bruch in der Angabe. (wenn möglich)

$$15\frac{38}{156} \quad mit\ 19$$

1.)

Es wird nur **der Bruch selbst** in der gemischten Zahl mit 19 erweitert, nicht aber die ganze Zahl!!!

$$15\frac{38 \rightarrow \cdot 19}{156 \rightarrow \cdot 19} = 15\frac{722}{2964}$$

2.) wir kürzen gleich in der Angabe:

$$15\frac{38 \rightarrow : 2}{156 \rightarrow : 2} = 15\frac{19}{78}$$

Umwandeln: unechter Bruch→gemischte Zahl:

***Zähler durch Nenner dividieren*, das *Ergebnis= Ganze Zahl* der gemischten neuen Zahl**

***Rest=Zähler* des Bruchs der gem. Zahl ->mit dem gleichen Nenner neben dem(n) Ganzen anschreiben**

Beispiel1 : $\frac{13}{8} \to 13:8=1 \quad 5 \text{ Rest} \quad \to 1\frac{5}{8}$ ***anders notiert*** $\frac{13}{8}=1\frac{5}{8}$

Beispiel2: $\frac{98}{12} \to 98:12=8 \quad 2 \text{ Rest} \quad \to 8\frac{2}{12} \to \textit{kürzen}! = 8\frac{1}{6}$

anders notiert $\frac{98}{12}=8\frac{1}{6}$

Umwandeln: gemischte Zahl →unechter Bruch:

Formel: (Ganze Zahl mal Nenner) + Zähler -> ergibt den neuen Zähler des unechten Bruchs

Der Nenner des Bruchs bleibt dann gleich im Ergebnis

Beispiel1: $14\frac{9}{13} \to (14*13)+9 \to \frac{191}{13}$ ***anders notiert:*** $14\frac{9}{13}=\frac{14\cdot 13+9}{13}=\frac{191}{13}$

Beispiel2: $33\frac{4}{5} \to (33*5)+4 \to \frac{169}{5}$ ***anders notiert:*** $33\frac{4}{5}=\frac{33\cdot 5+4}{5}=\frac{169}{5}$

Musterbeispiel zur Bestimmung des kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) als Wiederholung

*(um jene gemeinsame Zahl im Nenner beim Erweitern zu finden, die unser **gemeinsamer Nenner** bei der Addition und Subtraktion von 2 oder mehreren Brüchen ist.)*

Bsp: Bestimme das kgV von 30 und 40 kgV(30,40)

Wir zerlegen 30 und 40 in Primfaktoren.

30	**2**	40	**2**
15	**3**	20	**2**
5	**5**	10	**2**
1		5	**5**
1		1	

Oben: *Wir vergleichen jeweils die beiden rechten roten Spalten (also die Divisoren) in beiden Zerlegungen links und rechts.*
1.Schritt : wir beginnen mit dem ersten roten 2er in der linken Zerlegung. Er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. (siehe unten) In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett. Der 2er wird nur einmal gezählt.

30	**2**	40	**2**
15	**3**	20	**2**
5	**5**	10	**2**
1		5	**5**
		1	

2.Schritt Der nächste 3er kommt nirgendwo mehr vor. Wir lassen ihn nicht markiert/nicht umkreist stehen. Oben markieren wir ihn hellblau.

3.Schritt : Nun kommen wir zum 5-er.Der 5er kommt doppelt, also auch in der rechten Spalte vor. Wir markieren ihn oder umkreisen ihn .Hier markieren wir ihn grün. In der rechten Spalte wird er abgehakt. Hier markieren wir ihn violett. Der 5er wird nur 1mal gezählt.

Alle violetten Zahlen werden also nicht gezählt!!!(weil sie als doppelt nur 1mal gezählt werden!)

Übrig bleibt nun der 3-er in der linken Zerlegung und zwei 2-er rechts.(orange und rot)

Bilden wir das Produkt aus diesen doppelten nur 1mal gezählten und übrig gebliebenen grünen Zahlen ,so erhalten wir die Faktoren des kgV

$$\boxed{kgV(30,40) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren und einem gewissen Rest dazu:„Alle Zahlen, die doppelt vorkommen=alle Primfaktoren in der Zerlegung, werden nur 1mal multipliziert angeschrieben, der Rest,der übrig bleibt,wird auch mitgezählt (selbst wenn er nicht doppelt vorkommt)“

Erklärungen und Musterbeispiele

Multiplikation zweier Brüche

A Multiplikation eines Bruchs mit einer ganzen Zahl

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}}$$

Die Formel bedeutet:

Der Zähler wird mit *der ganzen Zahl* multipliziert,der Nenner bleibt unverändert!!!

Bsp1: $\frac{4}{9}\cdot 11=\frac{4\cdot 11}{9}=\frac{44}{9}=4\frac{8}{9}$

Bsp2: $\frac{8}{11}\cdot 22=\frac{8\cdot 22}{11}->kürzen=16$

B Multiplikation eines Bruchs mit einem Bruch

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Kurzformel: $\boxed{\frac{Zähler\ mal\ Zähler}{Nenner\ mal\ Nenner}}$

Ein Bruch wird mit einem anderen multipliziert, indem *die beiden Zähler und die beiden Nenner extra multipliziert werden.*

Gilt auch für mehr als 2 Brüche!!!-(siehe Bsp.2) -mehrere Brüche werden multipliziert, indem alle Zähler und alle Nenner multipliziert werden.

Bsp1: $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 6}=\frac{15}{42}=\frac{5}{14}$

Bsp2: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3\cdot 2\cdot(-4)}{4\cdot 9\cdot 5}->kürzen=-\frac{4}{30}=-\frac{2}{15}$

Es gelten wie in Z die Vorzeichen-Multiplikationsregeln:

$\underset{VzVz}{+*+} \underset{Vz}{\rightarrow +}$ $\quad \underset{VzVz}{-*+} \underset{Vz}{\rightarrow -}$ $\quad \underset{VzVz}{+*-} \underset{Vz}{\rightarrow -}$ $\quad \underset{VzVz}{-*-} \underset{Vz}{\rightarrow +}$ *Multiplikation*

Beachten wir:

$0 \cdot jeder\ Zahl = 0 \qquad jede\ Zahl \cdot 0 = 0$!!!!

In vielen Beispielen ist es ratsam, damit du nicht so hohe Zahlen beim Multiplizieren hast,
noch <u>vor dem Ausmultiplizieren</u> „kreuzweise“ ,also im „X“ zu kürzen

Kürzen: in der Angabe: *kreuzweise* χ

z.B. $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{9} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3}$ Krwkü

Unterscheid e das „normale Kürzen“ ***innerhalb*** *des Bruches*

z.B. $\frac{4}{8} \cdot \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ *beachte: hier könnten wir auch 4 gegen 14 „kreuzweise“ kürzen*

Achtung!!!!

Gemischte Zahlen *<u>vor</u> dem Ausmultiplizieren immer als* ***<u>unechten Bruch umschreiben!!!</u>***

$5\frac{4}{8} \cdot \frac{5}{14} \rightarrow kein\ Krwkü\ 4\ gegen\ 14\ möglich!!!! = \frac{44}{8} \cdot \frac{5}{14} \rightarrow Krwkü\ 44\ gegen 14 = \frac{22}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{110}{56}$

<u>Zur Bruchstrichschreibweise:</u>

$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{38} \rightarrow = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{8 \cdot 5 \cdot 38} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 38} = \frac{21}{760}$

Es wird nur ein Bruchstrich gesetzt.

Dies funktioniert im Gegensatz zur Addition und Subtraktion bei der Multiplikation auch bei ungleichnamigen Brüchen.

Division von Brüchen

A Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl

$$\boxed{\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\bullet\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c}}$$ $c\neq 0$ Beachte: c darf nicht Null sein!

Die Formel bedeutet:

Der **Nenner** des Bruchs wird mit der ganzen Zahl **multipliziert**, der *Zähler* bleibt ***unverändert!!!!***

Bsp: $\frac{12}{13}:4=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{4}=\frac{12}{52}-->durch\ 4\ kürzen=\frac{3}{13}$

B Division eines Bruchs durch einen Bruch

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\bullet\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc}}$$

Der Dividend (= 1.Bruch) wird mit dem ***Kehrwert des Divisors (2.Bruch***) multipliziert

Kehrwert…kommt von „um*kehren*“

also: der 2.Bruch wird umgedreht, das heißt ,der Zähler und der Nenner werden vertauscht, der 1. Bruch aber ***nicht umgedreht!!!!*** *und es wird* ***multipliziert***

Natürlich gelten dann wieder die Regeln für die Multiplikation von Brüchen!

Bsp1: $\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$

Bsp 2: $\frac{4}{7}:\frac{5}{8}=\frac{4}{7}\bullet\frac{8}{5}=\frac{32}{35}$

Nach der obigen Regel gilt daher für die Division eines Bruchs *durch eine ganze Zahl:*

ganze Zahlen beim Dividieren immer als „Eintel" schreiben und beim Multiplizieren als 1 dividiert durch die ganze Zahl

$$\boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \bullet \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}}$$

Es gelten wie in Z die Vorzeichen-Divisionsregeln:

$\underset{VzVz\quad Vz}{+:+\to+}$	$\underset{VzVz\quad Vz}{-:+\to-}$	$\underset{VzVz\quad Vz}{+:-\to-}$	$\underset{VzVz\quad Vz}{-:-\to+}$	*Division*

<u>Sonderfall Null</u>: $0: jede\ Zahl = 0 \qquad jede\ Zahl : 0 = "verboten"$!!!!

Kürzen bei der Bruchdivsion

Es gibt verschiedene Möglichkeiten:

1.) ***gleich in der Angabe <u>innerhalb</u> des Bruches*** ,dann erst Kehrwert bilden!

Bsp: $\frac{4}{16}:\frac{4}{8}=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ oder

2.) kreuzweise aber erst **<u>nach</u> <u>Bilden des</u> <u>Kehrwertes</u>** *in* ***<u>der Multiplikation!!!!</u>***

Unser voriges Bsp: $\frac{4}{16}:\frac{4}{8}=\frac{4}{16}\bullet\frac{8}{4}=KRWKÜ\ =\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Wir haben „kreuzweise“ im Sinne der Bruchmultiplikations-Kürzregeln gekürzt

4 gegen 4, 16 gegen 8!!!

Wir merken uns:

<u>In einer Bruchdivision dürfen wir niemals gleich in der Angabe „kreuzweise“ kürzen!!!</u>

Achtung!!!!

Gemischte Zahlen *<u>vor</u> dem Dividieren* *immer als **<u>unechten Bruch umschreiben!!!</u>***

Bsp1:

$$7\frac{7}{8}:\frac{4}{13}\to kein\ Krwkü\ 4\ gegen\ 8\ möglich!!!!=\frac{63}{8}:\frac{4}{13}\to Kein\ Krwkü\ 4 gegen\ 8!!=$$

$$\frac{63}{8}\bullet\frac{13}{4}=\frac{819}{32}=25\frac{19}{32}$$

Bsp2:

$$6\frac{5}{15}:2\frac{6}{9}\to kein\ Krwkü\ 6\ gegen\ 15\ möglich!!!!=\frac{95}{15}:\frac{24}{9}\to Kein\ Krwkü\ 24 gegen\ 15!!=$$

$$innerhalb\ desBruchs\ kürzen\frac{19}{3}:\frac{8}{3}=\frac{19}{3}\bullet\frac{3}{8}=krwkü\frac{19}{1}\cdot\frac{1}{8}=2\frac{3}{8}\to oder:\frac{57}{24}=2\frac{9}{24}=2\frac{3}{8}$$

Ein Doppelbruch ist einfach nur eine andere Schreibweise „in einem“ für die Division zweier Brüche.

Wir wissen ja ,dass das Dividiert-zeichen der Bruchstrich ist.

Das Ergebnis eines Doppelbruchs ist immer schließlich ein „normaler“ Bruch.

Auflösen eines Doppelbruchs: $\dfrac{Aussenglied \quad mal \quad Aussenglied}{Innenglied \quad mal \quad Innenglied}$

Kürze im aufgelösten einfachen Bruch dann wie in der „normalen“ Multiplikation zweier Brüche!!!- „kreuzweise“ oder gleich innerhalb des Bruchs jeweils *(siehe Kapitel: Multiplikation-Kürzen)*

Bsp1: $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{8 \cdot 5}{9 \cdot 4} = \dfrac{10}{9} = 1\dfrac{1}{9}$

Gemischte Zahlen <u>*vor dem Auflösen*</u> des Doppelbruchs in **einen unechten Bruch** umwandeln!!

Bsp2: $\dfrac{4\frac{5}{9}}{2\frac{6}{11}} = \dfrac{\frac{41}{9}}{\frac{28}{11}} = \dfrac{41 \cdot 11}{9 \cdot 28} = \dfrac{451}{252} = 1\dfrac{199}{252}$

Statt dem Auflösen nach der Formel hättest du auch eine **„normale“ Bruchdivision** ausführen können!

In Bsp1: $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{5}} \leftrightarrow \dfrac{8}{9} : \dfrac{4}{5} \quad = \dfrac{8}{9} \bullet \dfrac{5}{4} = kreuzweisesKürzen \rightarrow \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{5}{1} = \dfrac{10}{9} = 1\dfrac{1}{9}$

In Bsp2: $\dfrac{4\frac{5}{9}}{2\frac{6}{11}} \leftrightarrow 4\dfrac{5}{9} : 2\dfrac{6}{11} \quad = \dfrac{41}{9} : \dfrac{28}{11} = \dfrac{41 \cdot 11}{9 \cdot 28} = \dfrac{451}{252} = 1\dfrac{199}{252}$

Kürzen im Doppelbruch selbst

$$\frac{\frac{Z1}{N1}}{\frac{Z2}{N2}} \rightarrow$$

Z1 gegen Z2 **Zähler des 1.(=oberen) Bruchs gegen Zähler des 2.(unteren) Bruchs**

N1 gegen N2 **Nenner des 1.(=oberen) Bruchs gegen Nenner des 2.(unteren) Bruchs**

Bsp: $$\frac{\frac{5^{:5}}{7^{:7}}}{\frac{15^{:5}}{21^{:7}}} \rightarrow gekürzt -> 5\ gegen\ 15\ und\ 7\ gegen\ 21 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}} \rightarrow$$

$$Auflösen > (Außen\ mal\ Außen)\ durch\ (Innen\ mal\ Innen) = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} \rightarrow kürzen = \frac{1}{3}$$

Achtung! Verwechsle nicht die Regeln für das *Kürzen* im Doppelbruch und das *Auflösen!*!!!

Merke: **Auflösen des Doppelbruchs:**

(**A** mal **A**) durch (I mal I)

A…. Außenglied I….Innenglied

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

010

Textgleichungen

Kopfnüsse

Es soll die folgende Textgleichung in Q (also über der Grundmenge Q) gelöst werden:

Musterbsp.1:

Das Achtzehnfache einer natürlichen Zahl, vermehrt um 13, ergibt 999.

Wie lautet die (rationale) Zahl???

Was bedeutet nun „Lösen"????

Wir wollen dies so einfach als möglich erklären:

<u>Lösen heißt, einen grammatikalischen Text Schritt für Schritt in die Sprache der Mathematik zu übersetzen.</u>

Die „Vokabeln" ,die du dabei zur Verfügung hast, und für das Lösen von Textgleichungen benötigst, sind:

Wir lernen **Deutsch-Mathematisch**

x..........Zahl

x ist die ***Variable*** *oder Platzhalter*- das, was wir suchen oder ausrechnen sollen

das.......fache einer Zahl ->>> x mal ....oder .....mal x -> .....$\bullet\, x = x \bullet$......

Hier in unserem Bsp.: das Achtfache einer Zahl-> $8 \cdot x = x \cdot 8$

Das Doppelte->$2 \cdot x = x \cdot 2$

Das Dreifache->$3 \cdot x = x \cdot 3$

Der......te Teil einer Zahl→ $x : .... = \frac{x}{......}$ (dividiert durch)

Bsp.: der neunte Teil einer Zahl oder ein Neuntel -> $x : 9 = \frac{x}{9}$

<u>Vermehrt um</u> ....->>>> $+$...... (plus.....) ......ist eine Zahl

<u>Vermindert um</u> ....->>>>> $-$...... (minus......) ......ist eine Zahl

Summe..... Ergebnis der Addition (Plusrechnung)

Differenz.... Ergebnis der Subtraktion (Minusrechnung)

Produkt.... Ergebnis der Multiplikation

Quotient…… Ergebnis der Division

Summanden.....Teile (Zahlen, Variable) zwischen dem „+“-zeichen

Minuend……Die Zahl oder Variable, von der etwas abgezogen (subtrahiert) wird

also die Zahl oder Variable, die vor dem Minuszeichen steht

Subtrahend…. Die Zahl oder Variable, die abgezogen (subtrahiert) wird

also die Zahl oder Variable, die nach dem Minuszeichen steht

1.Faktor (Multiplikand)……… Die Zahl oder Variable mit der multipliziert wird

also die Zahl oder Variable, die links des Multiplikationszeichens steht

2.Faktor (Multiplikator)…………… Die Zahl oder Variable, die multipliziert wird

also die Zahl oder Variable, die rechts des Multiplikationszeichens steht

Dividend……… Die Zahl oder Variable durch die dividiert wird

also die Zahl oder Variable, die links des Divisionszeichens steht

Divisor…. Die Zahl oder Variable durch die dividiert wird

also die Zahl oder Variable, die rechts des Divisionszeichens steht

Ergibt.....-> =…… ist gleich

Beachte , dass bei einer Gleichung immer ein *linker Teil sowie ein rechter Teil* auf Seiten des „= zeichens“ vorkommt.

Wir schreiben für eine Gleichung kurz:

$T_1 = T_2$

T_1 ist die linke Seite und bedeutet „Term1“

T_2 ist die rechte Seite und bedeutet „Term2“

Was „Term“ genau bedeutet, wollen wir in der nächsten Chili erklären.

Wir merken uns für dieses Kapitel:

Term= eine oder mehrere Zahlen ,dazu eine Variable, verbunden durch ein (oder mehrere) Rechenzeichen.

T1=T2

Was bedeutet jetzt aber „Lösen über der Grundmenge Q“????

Nun, die Lösung kann auch eine rationale Zahl (also ein Bruch ,eine Dezimalzahl oder natürlich auch eine *ganze Zahl* sein.->überlege: diese ist ja auch eine rationale, weil die Menge der ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen ist.

Unsere Gleichungen sind so konzipiert, dass die Lösung meist nicht ganzzahlig ist. Dies hat den Vorteil, dass du auch das Bruchrechnen und Rechnen mit Dezimalzahlen wiederholst und übst.

Übersetzt in die mathematische Sprache lautet unser Musterbeispiel des ersten Blatts also:

$$18 \cdot x + 13 = 999$$

Nun bringen wir alle Zahlen auf eine Seite:

$18 \cdot x + 13 = 999 \quad |-13$ *Äquivalenzumformung : „das Gegenteil auf der anderen Seite tun“*

„Was wir links tun, müssen wir auch rechts tun“

Denn eigentlich steht

$18 \cdot x - 13 + 13 = 999 - 13$ *und -13+13=0 also hebt sich auf der linken Seite weg!!!*

Das Gegenteil= die inverse Operation des Addierens ist das Subtrahieren

$$18 \cdot x = 999 - 13$$

$18 \cdot x = 986 \quad |:8$ *Das Gegenteil= die inverse Operation des Multiplizierens ist das Dividieren*

$x = \frac{986}{18}$ *kürzen*

$$x = \frac{493}{9} = 54{,}7777777$$

Die Lösung ist also eine rationale Zahl- ein Bruch oder eine Kommazahl.

Probe:

Wir setzen $x = \frac{493}{9} = 54{,}7777777$ *in die Angabe ein*

$$18 \cdot \frac{493}{9} + 13 = 999$$

*Die Gleichung muss jetzt eine **w. A. (wahre Aussage)** ergeben. Dies bedeutet, links und rechts des „=- zeichens " muss dieselbe Zahl stehen.*

$$\rightarrow 999 = 999 \quad \text{w. A.}$$

w.A. ……Wiener Apfelstrudel (…..siehe Abbildung rechts!!!)

Wir haben also richtig gerechnet.

Beachte:

Die Äquivalenzumformungen sind nie eindeutig!!!!

*Dies bedeutet, du kannst mit **verschiedenen Schritten zum selben Ergebnis** kommen!!!*

Wir wollen dies veranschaulichen:

Beispiel:

Wir gehen aus von der Gleichung:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6}$$

1.Möglichkeit:

$$11 \cdot x + 17 = 69x - \frac{x}{6} \quad \left| -11x \right.$$

$$+17 = 58x - \frac{x}{6} \quad usw.$$

*das Gegenteil von w.A. ist **f.A.->falsche Aussage***

2.Möglichkeit:

$$11\cdot x+17=69x-\frac{x}{6}\quad\Big|-69x$$

$$-58x+17=-\frac{x}{6}$$

3.Möglichkeit:

$$11\cdot x+17=69x-\frac{x}{6}\quad\Big|\cdot 6$$ *um den „lästigen" Bruch wegzubekommen!!!!*

$$66\cdot x+102=414\cdot x-x\quad usw.$$

4.Möglichkeit:

$$11\cdot x+17=69x-\frac{x}{6}\quad\Big|-17$$

$$11\cdot x=69x-\frac{x}{6}-17$$

Oder gleich rechts auf gemeinsamen Nenner bringen:

$$11\cdot x+17=\frac{69\cdot 6x}{6}-\frac{x}{6}$$

$$11\cdot x+17=\frac{414x}{6}-\frac{x}{6}\qquad 11\cdot x+17=\frac{413x}{6}\quad\Big|-11x=\frac{66x}{6}$$

…und alle Wege führen zur Lösung $x=\frac{102}{347}$

Beispiele mit „größer /kleiner als“

Beachte: ***Musterbeispiel 2:***

Das Fünffache einer Zahl ist um 9 kleiner als ein Siebtel der Zahl.

Wie lautet die Zahl???

„Übersetzung“ und Ansatz:

$5x=\frac{x}{7}-9\,\big|\cdot 7$ *um 9 kleiner->-9 wird rechts des „=“ angeschrieben!!!*

also : 9 wird auf der ***rechten Seite*** *subtrahiert!!!!!*

Richtig wäre auch: $5x+9=\frac{x}{7}$ *oder* $5x=-9+\frac{x}{7}$

$35x=x-63\,\big|-x$

$34x=-63\,\big|:34 \rightarrow x=-\frac{63}{34}$

Musterbsp.3:

Das Zwölffache der um 33 verminderten Zahl ist um 91 kleiner als das der vierte Teil dieser Zahl. Wie lautet die Zahl???

Die um 33 verminderte Zahl......... $x-33=(x-33)$ *um die „Einheit“ dieser Zahl auszudrücken, setzten wir sie in Klammer.*

Von dieser Zahl das Zwölffache: $12\cdot(x-33)$

Es gilt natürlich das Verteilungsgesetz!!!! $12\cdot(x-33)=12\cdot x-12\cdot 33$

Deshalb müssen wir die Klammer unbedingt setzen!!!!

Also lautet unser Gleichungsansatz:

$$12 \cdot (x-33) = \frac{x}{4} - 91$$

$$12x - 396 = \frac{x}{4} - 91 \quad \Big| +396$$

$$12x = \frac{x}{4} + 305 \quad \Big| \cdot 4$$

$$48x = x + 1220 \quad \Big| -x$$

$$47x = 1220 \quad \Big| : 47 \rightarrow x = \frac{1220}{47} = 25{,}9547$$

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

011

Der Term

Teil 1: Aufstellen von Termen

und

013

Checke dein Wissen

Begriff einer ***Gleichung*** : Wir schreiben für eine Gleichung kurz:

$T_1 = T_2$

T_1 ist die linke Seite und bedeutet *„Term1“*

T_2 ist die rechte Seite und bedeutet *„Term2“*

Dabei ist der Begriff des Terms vorgekommen. Was ein Term ist ,haben wir noch nicht genau definiert gehabt, nur im weiteren Sinn. Wir wollen dies jetzt tun.

Merke:

Der Term ist ein **Rechenausdruck, in dem Zahlen, Variable, Rechenzeichen und Vorzeichen auftreten.**

1.) Jede Zahl (egal ob natürlich, ganz oder rational, positiv oder negativ) selbst ist ein Term.

Beispiel für einen Term: $\frac{24}{27}$ $\quad 1234567 \quad -4{,}1345 \quad -6\frac{5}{11}$

2.) Jeder Ausdruck, der aus Zahlen und einem Verknüpfungszeichen (hier bei uns jetzt die 4 häufigen Rechenoperationszeichen) besteht, $(+,\cdot,-,:)$ ist ein Term

Beispiel für einen Term: $39+0{,}05689004 \quad 7-\frac{69}{91} \quad (991{,}91-87)\cdot 23$

3.) Jede Variable selbst ist ein Term

Beispiel für einen Term: $w \quad x \quad c \quad f \quad j \quad k \quad t \qquad bigmaec = b\cdot i\cdot g\cdot m\cdot a\cdot e\cdot c$

4.) Jeder (mathematisch sinnvolle) Ausdruck, *der aus Zahlen, Variablen und Verknüpfungszeichen* besteht ist ein Term

Beispiel für einen Term: $117w-z \quad \frac{33vx}{98p}\; p\neq 0 \quad r\cdot s \quad \frac{m}{m-3}\; m\neq 3$

5.) Damit ist auch das Symbol des Volumens V ein Term.

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Noch einige Beispiele für Terme:

$\frac{33}{34}$ $\quad 1234-(66 \cdot 23)$ $\quad f$ $\quad \frac{38cg}{56z} \quad z \neq 0$ $\quad A \quad (\textit{Flächeninhalt des Dreiecks})$

Eine **Gleichung oder Formel** besteht *aus 2 Termen, die durch „=“ voneinander getrennt sind*

z.B.: $R = \frac{g \cdot s^2}{34w} \qquad E = \frac{mc}{\sqrt{7u}}$

Setzen wir *Zahlen (oder eine Zahl) für die Variable(n)* in einen Term ein, so erhalten wir den ***Wert des Terms***

Beachte: Der Wert ist immer eine **Zahl!**

Beispiel 1: $T(y) = 2y + 23 \qquad y = 4 \rightarrow \qquad T(4) = 2 \cdot 4 + 23 = 31$

Wir sprechen: „T *an der Stelle* 4“

Der Wert des Terms ist also 31

Beispiel 2:

$$T(z,h) = \frac{45z}{66h-11} \qquad z = \frac{7}{9}, h = 4 \quad \rightarrow \quad T\left(\frac{7}{9}, 4\right) = \frac{45 \cdot \frac{7}{9}}{66 \cdot 4 - 11} = \frac{35}{253} = 0{,}13834$$

Beachte: **Der Nenner eines Terms darf nie Null sein!**

$$T(e,f) = \frac{707e - 12f}{9e} \qquad e \neq 0$$

e darf nicht Null sein,

wäre e Null $\qquad e = 0, f = 5{,}5 \rightarrow T(0{,}5.5) = \frac{707 \cdot 0 - 12 \cdot 5{,}5}{9 \cdot 0} = \frac{707 \cdot 0 - 12 \cdot 5{,}5}{0}$

Die Division durch Null ist verboten /nicht definiert!!!!

Musterbeispiel Nr.1 zu Ü1 *(zu Null im Nenner☺)*

$$T(j,k)=\frac{j+13-k}{9j-\frac{1}{3}}$$

wir sprechen*: ein Term in j und k*

Welchen Wert darf hier nun j nicht annehmen? Anders ausgedrückt:

Welche Zahl dürfen wir in den Nenner (für j in diesem Fall) nicht einsetzen?? Dieser darf ja nicht Null werden!!!

Seien die folgenden Belegungen gegeben (für die Buchstaben=Variablen setzen wir direkt

ein)

$$j=0, k=7 \rightarrow Einsetzen\ der\ Zahlen\ für\ die\ Variablen \rightarrow T(0,7)=\frac{0+13-7}{9\cdot 0-\frac{1}{3}}$$

Der Nenner ergibt $-\frac{1}{3}$. Das darf sein.

Um zu sehen, welche Zahl wir nicht einsetzen dürfen, *setzen wir den Nenner einfach 0* und rechnen uns mit einer Gleichung ,die wir lösen, die Variable im Nenner aus.

(Das Lösen einer Gleichung mittels Äquivalenzumformungen haben wir bereits in der Wissensleuchtturm zu Gleichungen durchgeführt.)

$$9j-\frac{1}{3}=0 \quad \left|+\frac{1}{3}\right.$$

$$9j=\frac{1}{3} \quad |:9$$

$$9j=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{9}{1}} oder =\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{1}=\frac{1}{27} \qquad j\neq\frac{1}{27} \text{ weil } \quad 9\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{3}=0\rightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

Was im Zähler steht, brauchen wir *nicht zu beachten!!!!!*

Der Dividend kann ja Null sein (Der Bruchstrich ist ja ein Divisionszeichen)

z.B.: $\frac{0}{34}=0:34=0$

Musterbeispiel Nr.2 **zu Ü1** *(zu Null im Nenner☺)*

$$T(e) = \frac{e}{\frac{e}{8} - \frac{4}{5}}$$

Welchen Wert darf hier nun e nicht annehmen? Anders ausgedrückt:

Welche Zahl dürfen wir in den Nenner (für e in diesem Fall) nicht einsetzen?? Dieser darf ja nicht Null werden!!!

$$\frac{e}{8} - \frac{4}{5} = 0 \left| + \frac{4}{5} \right.$$

$$\frac{e}{8} = \frac{4}{5} \left| \cdot 8 \right.$$

$$e = \frac{4}{5} \cdot 8$$

$$e = \frac{4 \cdot 8}{5} = \frac{32}{5}$$

$\frac{32}{5}$ dürfen wir also *<u>nicht in den Nenner einsetzen.</u>*

$e \neq \frac{32}{5}$ weil $\frac{\frac{32}{5}}{\frac{8}{1}} - \frac{4}{5} = \frac{32}{40} - \frac{4}{5} \rightarrow k\ddot{u}rzen \rightarrow \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$

Wenn $e = \frac{32}{5}$ wird also der Nenner 0.

$$T\left(\frac{32}{5}\right) = \frac{\frac{32}{5}}{\frac{\frac{32}{5}}{8} - \frac{4}{5}}$$

Für e $\frac{32}{5}$ einzusetzen ist in der Mathematik „verboten“

Einteilung der Terme

1.)

Monom: ***eingliedriger Term-*** besteht aus Koeffizient und Variable

z.B. $13z = 13 \cdot z$

der Malpunkt muss nicht geschrieben werden

13 ist der **Koeffizient**, z ist die **Variable**

Weitere Beispiele: $\frac{4}{7}w \quad -18y \quad 2uv$

2.)

Binom: ***zweigliedriger Term** :* *2* eingliedrige Terme durch + und – getrennt

z.B. 22 b + 13 c

Weitere Beispiele: $u+v \quad 6a-4b$

3.)

Trinom: *dreigliedriger Term*

z.B. $\frac{13}{23}u + 21v - 4{,}6w$

Weiteres Beispiel: $17z + \frac{1}{3}xy - 9y$

4.)

Polynome: *mehrgliedrige Terme*

z.B. $4{,}25a + \frac{7}{8bc} - 45ab + 33d - 12{,}6e \qquad 39rs + \sqrt{2}t - \frac{1}{3}s + 13r$

Polynomfunktionen sind Kurven (meist nur in 1 Variablen)

Beispiel: $3x^3 + 5x^2 - 6x + 14 = 0$

Musterbeispiel zu Ü2

Berechne den ***Wert des Terms***, wenn du für die Variable jeweils die angegebenen Zahlen einsetzt: $g = \frac{3}{13}$, $g = -\pi$

Das heißt setze einmal für $g = \frac{3}{13}$ und das andere Mal $g = -\pi$ ein

darf g 0 sein???? *Falls ja, welchen Wert darf g nicht annehmen????*

$$T(g) = \frac{494g - 99}{61{,}1 + 13g} \qquad g = \frac{3}{13}$$

$$T(g) = \frac{494g - 99}{61{,}1 + 13g} \qquad g = -\pi$$

1.)

$$T\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{494 \cdot \frac{3}{13} - 99}{61{,}1 + 13 \cdot \frac{3}{13}} = 0{,}23400936$$

2.)

$$T(-\pi) = \frac{494 \cdot (-\pi) - 99}{61{,}1 + 13 \cdot (-\pi)} = 81{,}490828$$

Zu 1.):

g darf Null sein, weil $T(0) = \frac{494 \cdot 0 - 99}{61{,}1 + 13 \cdot 0}$ und der Nenner **nicht 0 wird**!!!

Welchen Wert darf nun g nicht annehmen??? Wir setzen den Nenner *wie in den Übungsbeispielen Ü1 und Ü2 auf Seite 3 und S 4* zuvor Null:

$$61{,}1 + 13g = 0 \quad \left| -61{,}1\right.$$

$$13g = -61{,}1 \quad \left| :13\right.$$

$$g = \frac{-61{,}1}{13} = -4{,}7 \qquad \rightarrow g \neq -4{,}7$$

Wir dürfen also -4,7 nicht einsetzen. Der Nenner würde dann Null ergeben und die Division durch Null ist in nder Mathematik „verboten“ !!!!!

Musterbeispiel zu Ü3

Berechne den Wert des Polynoms wenn du für die Variablen in das Polynom jeweils die angegebenen Zahlen einsetzt:

$$p(f,g,h,i) = -\frac{1}{6}f + 13g - 0{,}4h + 4\frac{4}{5}i \qquad \rightarrow Polynom\ in\ f,g,h\ und\ \ i$$

$$f = -\frac{7}{8} \qquad g = 9{,}2 \qquad h = 4\frac{4}{9} \qquad i = -3$$

$$p\left(-\frac{7}{8}, 9.2, 4\frac{4}{9}, -3\right) = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) + 13\cdot 9{,}2 - 0{,}4\cdot 4\frac{4}{9} + 4\frac{4}{5}\cdot(-3) = 107{,}1236111111$$

Musterbeispiel zu Ü4

Schreibe den folgenden Text als Term!

Addiere zur Differenz des Dreizehntels der Zahl u und 988 den Quotienten aus der Summe

der Zahl v mit 75 und der Zahl z

Wir übersetzen den Text schrittweise:

Differenz des Dreizehntels der Zahl u und 988 .... $\frac{u}{13} - 988$

Sicherheitshalber setzen wir eine Klammer: $\rightarrow \left(\frac{u}{13} - 988\right)$

Summe der Zahl v mit 75 .... $v + 75$

Quotient mit der Zahl z .... $\frac{v+75}{z} \qquad \rightarrow \left(\frac{v+75}{z}\right)$

zur Differenz des Dreizehntels der Zahl u und 988 den Quotient dazu addieren

$$\frac{u}{13} - 988 + \frac{v+75}{z} \qquad\qquad \left(\frac{u}{13} - 988\right) + \left(\frac{v+75}{z}\right)$$

Nun haben wir den Text ins „Mathematische übersetzt“.

Wir müssen jetzt noch den Text als *Term anschreiben*.

$$T(u,v,z)=\frac{u}{13}-988+\frac{v+75}{z}$$ es kommen also 3 Variable vor.

Wir brauchen keine Klammern in diesem Fall, da wir nur hintereinander ausführende Strichoperationen haben.

Wir könnten jetzt noch weiter vereinfachen, auf gemeinsamen Nenner bringen

und soweit als möglich zusammenfassen

$$T(u,v,z)=\frac{uz-988\cdot 13z+13\cdot(v+75)}{13z}=\frac{uz-12844z+13v+975}{13z}$$

Beachte das Verteilungsgesetz beim Erweitern des letzten Bruchs!

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm**

012

Der Term

Teil 2: Rechnen mit Termen

und

013

Checke dein Wissen

Rechnen mit Termen bedeutet, einen Term **soweit als möglich zu vereinfachen und (das heißt) zusammenzufassen.**

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zusammnefassen & Ordnen gleicher Variable

Wir überlegen:

$e = 1 \bullet e$ Ein Beispiel aus dem Alltag: Kaufen wir einen Big Kebab , haben wir ja **einen** (1) Big Kebab ,also *einmal einen* (1mal) Big Kebab. Anstelle des Big Kebabs setzen wir den Buchstaben e . Der Buchstabe ist eine *Variable oder Platzhalter*.

Da bei der Multiplikation das Vertauschungsgesetz gilt,schreiben wir $e = 1 \bullet e = e \bullet 1 = 1e$

Haben wir einen Big Kebab und kaufen einen 2.dazu, und setzen wir für „Big Kebab“ wieder die Variable e, müssen wir ja addieren, wir notieren nach obigen Überlegungen zum Vertauschungsgesetz:

1 Big Kebab plus 1 Big Kebab sind 2 Big Kebabs!

$e + e = 1e + 1e = 1 \cdot e + 1 \cdot e = 2e = 2 \bullet e = e \bullet 2$

Wir merken: das Multiplikationszeichen zwischen der Zahl und der Variablen (Buchstaben) *müssen wir nicht schreiben*!

Aber: $e2$ ergibt keinen Sinn!!! $e \cdot 2$ hingegen schon!

Nun setzen wir die Variable k an:

$k + k + k = 3k = 3 \cdot k = k \cdot 3$ $k3$ ergibt keinen Sinn

Beachte:

$9 + 9 + 9 = 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3 \neq 39$!!!

Beim Anschreiben einer Multiplikation zwischen **2 Zahlen müssen wir das Multiplikationszeichen natürlich unbedingt setzen!!!**

Allgemein:

$\underbrace{e + e + e + e + e + e + \ldots\ldots\ldots\ldots + e}_{n\ mal} = n \cdot e = ne = e \cdot n$

e wird n mal addiert

n gibt an, wie *oft die Variable (hier e) addiert wird.*

Beispiel: $n = 399$ e wird 399mal addiert $399 \cdot e = e \cdot 399 = 399e$

Addieren wir nicht nur einzelne Variablen, sondern *Zahlen multipliziert mit Variablen*, so werden die Zahlen addiert und die Variable mit einem Multiplikationszeichen zur Klammer „dazugeschrieben“

Beispiel: $3 \cdot e + 5 \cdot e + 8 \cdot e + 13 \cdot e = (3 + 5 + 8 + 13) \cdot e = 29 \cdot e = 29e = \cdot e \cdot 29$

$3e + 5e + 8e + 13e = 29e = 29 \cdot e = \cdot e \cdot 29$

Merke: Zusammenfassen:

$(Zahl \pm Zahl \pm ....) \bullet \text{ "}Buchstabe - immer\ gleich\text{"}$

Natürlich kann für e jede Variable (=jeder Buchstaben) stehen, für die Koeffizienten (Zahlen vor der(n) Variable(n))können auch *Dezimalzahlen oder Bruchzahlen* stehen.

Es gilt:

Wir können nur jene Variablen jeweils ***addierend und subtrahierend zusammenfassen, die gleich sind .***

Als Hilfe kannst du wie in den folgenden Musterbeispielen im 1.Schritt eine Klammer setzen und jene Glieder zusammenfassend hineinschreiben, die gleiche Variable aufweisen.

Merke: Zusammenfassen:

$(Zahl \pm Zahl \pm ....) \bullet \text{ "}Buchstabe - immer\ gleich\text{"}$

Musterbeispiel Ü1

Schreibe anders ,das heißt, fasse zusammen und vereinfache soweit als möglich!

$5v + 6w + 4s + 4v + 13w + 400s = (5v + 4v) + (6w + 13w) + (4s + 400s) = 9v + 19w + 404s$

Die Klammern musst du im Normalfall nicht schreiben, sie sollen nur die Zusammengehörigkeit zeigen.

Nur Zahlen mit der gleichen Variable können addiert (oder subtrahiert) werden.

Am Ende haben wir die Variablen noch *alphabetisch geordnet.*

Unser Tip : Markiere dir alle Glieder,die du zusammenfassen kannst, in ein und derselben Farbe oder mit Zeichen jeweils. So kannst du dich weniger irren.

Musterbeispiel Ü2

Schreibe anders das heißt, fasse zusammen und vereinfache soweit als möglich! Ordne!

$-32j-44k+41m-35k+21j-76ms-7kj+77sm=$

Auch ein Produkt zweier Variablen kann vorkommen. ***Nur <u>gleiche Produkte</u> können addiert oder subtrahiert werden.*** (beachte bei Vertauschung der beiden dass ja das *Kommutativgesetz gilt* und sie dann zusammengefasst werden können.

Etwa $ms = sm = s \cdot m = m \cdot s$

$(-32j+21j)+(-44k-35k)+41m+(-76ms+77sm)-7kj=-11j-79k+41m+1sm-7kj=$
$=-7kj+sm-11j-79k+41m$

Wir haben die Variable noch alphabetisch und die gemischten Glieder zuerst angeordnet.

Die Klammern musst du im Normalfall nicht schreiben, sie sollen nur die Zusammengehörigkeit zeigen

Musterbeispiel Ü3

Schreibe anders das heißt, fasse zusammen und vereinfache soweit als möglich! Ordne!

Rechne mit Brüchen!

$-\frac{1}{5}d+\frac{4}{11}g+\frac{1}{8}d+0.03g=\left(-\frac{1}{5}d+\frac{1}{8}d\right)+\left(\frac{3}{20}g+0{,}03g\right)=-\frac{8}{40}d+\frac{5}{40}d+\frac{15}{100}g+\frac{3}{100}g=$
$-\frac{3}{40}d+\frac{18}{100}g=gekürzt=-\frac{3}{40}d+\frac{9}{50}g$

wir haben die Dezimalzahl auf einen Bruch gebracht und im 1.Schritt gleiche Variable geordnet.

Im 2.Schritt haben wir die Brüche auf gemeinsamen Nenner gebracht.

Die Klammern musst du im Normalfall nicht schreiben, sie sollen nur die Zusammengehörigkeit zeigen.

Am Ende haben wir die Variablen noch alphabetisch geordnet.

Später werden wir auch solche Variable addierend zusammenfassen, die mit einer *Hochzahl versehen sind, also Potenzen.*

Etwa $3e^2 + 5e^2 + 8e^2 + 13e^2 = 29e^2 = 29 \cdot e^2 = \cdot e^2 \cdot 29$

„chilliger“, also problematischer:

$3e^2 + 5e^3 + 8e^4 + 13e^5$ ist nicht mehr so leicht zu addieren!!!! *Potenzen gleicher Basis, aber verschiedener Hochzahlen können nicht so leicht addiert werden!* (die Multiplikation ist leichter!!!-siehe später Kapitel über Potenzen)

Überlegung zum Zusammenfassen von Termen in Klammern

Bsp.:

$$(4e+11f)+(4e+11f)+(4e+11f)$$
$$=4e+11f+4e+11f+4e+11f+4e+11f=4e+4e+4e+4e+11f+11f+11f+11f$$
$$=12e+33f$$

Wir lassen die Klammern *weg und „fassen normal wie in den vorigen Ü zusammen“*

Überlegung:

$$(4e+11f)+(4e+11f)+(4e+11f)=3\bullet(4e+11f)$$

Die Klammer wird ja 3 mal addiert

Nach dem Verteilungsgesetz gilt:

$$(4e+11f)+(4e+11f)+(4e+11f)=3\bullet(4e+11f)=3\cdot 4e+3\cdot 11f=12e+33f$$

aber:

$$(4e+13f)+(4e+11f)+(4e+11f)=(4e+13f)+2\cdot(4e+11f)$$

Merke: ***nur völlig gleiche Klammern*** **können zusammengefasst = addiert werden!!!!!!**

Musterbeispiel Ü4

Schreibe anders das heißt, fasse zuerst zusammen und vereinfache dann erst soweit als möglich! Ordne!

$$(33d+4h)+(0{,}7z-2{,}2y)+(33d-4h)+(0{,}7z-2{,}2y)+(33d+4h)-7(33d-4h)-(32d-4h)=$$
$$2\cdot(33d+4h)+2\cdot(0{,}7z-2{,}2y)-6\cdot(33d-4h)-(32d-4h)=66d+8h+1{,}4z-4{,}4y-192d+$$
$$+24h-32d+4h=(66-192-32)d+(+8+24+4)h+1{,}4z-4{,}4y=-158d+36h+1{,}4z-4{,}4y$$

Gleiche Klammerinhalte fassen wir einfach wie eine Variable x auf und rechnen mit den Koeffizienten, also den Zahlen vor der Klammer. Nur Vorzahlen völlig gleicher Klammern können wir addieren oder subtrahieren

Beachte: $1(33d-4h)-7(33d-4h)=-6\cdot(33d-4h)$

Nach dem Zusammenfassen der Klammern multiplizieren wir die Zahl vor der Klammer mit der Klammer nach dem Verteilungsgesetz aus und vereinfachen dann noch weiter zusammenfassend.

Musterbeispiel Ü5

Rechne auf 2 Arten

1.Art:

$$\left(\frac{3fk}{5}-\frac{7kf}{25}\right)\cdot 9=$$

zunächst Zusammenfassen *in der Klammer* .Dies ist möglich, da nach dem Vertauschungsgesetz $kf=fk$ gilt. Wir bringen den Bruch auf *einen gemeinsamen Nenner*.

$$\left(\frac{15fk}{25}-\frac{7fk}{25}\right)\cdot 9=\left(\frac{8fk}{25}\right)\cdot 9=\frac{72fk}{25}=2\frac{22}{25}fk$$

2.Art:

$$\left(\frac{3fk}{5}-\frac{7kf}{25}\right)\cdot 9=$$

Zuerst Ausmultiplizieren nach dem Verteilungsgesetz

$$\left(\frac{3fk}{5}\cdot 9-\frac{7kf}{25}\cdot 9\right)=\frac{27fk}{5}-\frac{63fk}{25}=\frac{135fk}{25}-\frac{63fk}{25}=\frac{72fk}{25}$$

Musterbeispiel Ü6

Schreibe anders das heißt, fasse zuerst zusammen und vereinfache dann erst soweit als möglich! Ordne!

$$\frac{15}{44vbu}-\frac{16}{33vbu}+\frac{30}{44vbu}-\frac{3}{44}vbu-\frac{9}{44ubv}=$$

Beachte:

Wir können nur jene Brüche zusammenfassen, deren Nenner **in Variable und Vorzahl** völlig **gleich** sind!!!!!

Da nach dem Vertauschungsgesetz $vbu=ubv$ gilt, ist der 1.3. & 5.Bruch im Nenner gleich, wir können diese daher zusammenfassen.

$$\left(\frac{15}{44vbu}+\frac{30}{44vbu}-\frac{9}{44vbu}\right)-\frac{16}{33vbu}-\frac{3}{44}vbu=\frac{36}{44vbu}-\frac{16}{33vbu}-\frac{3}{44}vbu$$

Nun ist kein weiteres Zusammenfassen mehr möglich!!!

Sehr wohl aber das *Bringen auf einen gemeinsamen Nenner* !!!

Wobei auf diesen gemeinsamen Nenner in diesem Kapitel nicht das Hauptgewicht gelegt werden soll!!!

$$=-\frac{3}{44}vbu-\frac{1}{3vbu}$$

Steht(en) die Variabel(n) neben dem Bruchstrich auf dessen Höhe, ist dies dasselbe, wie wenn sie im Zähler stehen!!!

$$\frac{4}{7}e=\frac{4e}{7}\neq\frac{4}{7e} \qquad \frac{4}{7}e=\frac{4}{7}\bullet e=\frac{4\bullet e}{7}$$

Obiges Beispiel:

$$-\frac{3}{44}vbu=-\frac{3vbu}{44} \qquad ABER\neq-\frac{3}{44vbu}!!!!!!!!!!!!$$

wir rechnen fast nur mehr mit buchstaben!!

Rechnen mit Klammern

Rechnen mit Klammern

Fall 1: ***Plus*** *vor der Klammer*

es gelten wieder die „Crash-regeln“!!

„Crash-Regeln“ trifft ein Rechenzeichen auf ein Vorzeichen:

$$\underset{Rz}{+}\ \underset{Vz}{(+)} \rightarrow \underset{Rz}{+} \qquad \underset{Rz}{+}\ \underset{Vz}{(-)} \rightarrow \underset{Rz}{-}$$

1.Möglichkeit: „Sofort-Wegbringen“ der Klammer

Ü $\frac{3s}{7}+\left(\frac{3s}{14}-\frac{6s}{7}\right)=\frac{3s}{7}+\frac{3s}{14}-\frac{6s}{7}$ + stößt auf + wird zu + !!! + auf - >> - !!!!

2.Möglichkeit: „Zuerst-Berechnen“ der Klammer

Zuerst wird **in der Klammer** zusammengefasst und auf gemeinsamen Nenner gebracht

Ü $\frac{3s}{7}+\left(\frac{3s}{14}-\frac{6s}{7}\right)=\frac{3s}{7}+\left(\frac{3s}{14}-\frac{12s}{14}\right)=\frac{3s}{7}+\left(-\frac{9s}{14}\right)=\frac{3s}{7}-\frac{9s}{14}=-\frac{3s}{14}$

Merke: $\{\ \} vor [\ ] vor (\ )$

eckige Klammer kommt vor der runden- mit der *runden von innen nach außen* zum Auflösen beginnen!!!!

Fall 2: Minus vor der Klammer

es gelten wieder die „Crash-regeln“!!

„Crash-Regeln“ trifft ein Rechenzeichen auf ein Vorzeichen:

$$\underset{Rz\,Vz}{-(+)} \rightarrow \underset{Rz}{-} \qquad \underset{Rz\,Vz}{-\ (-)} \rightarrow \underset{Rz}{+}$$

1.Möglichkeit: „Sofort-Wegbringen“ der Klammer

Ein Minus vor einer Klammer ***ändert alle Vor- und Rechenzeichen innerhalb der Klammer!!!!***

Ü $19fwj-(13jwf-17wfj)=19fwj-13jwf+17wjf=23fjw$

2.Möglichkeit: „Zuerst- Berechnen“ der Klammer

in der Klammer *wird zuerst zusammengefasst*

Ü $19fwj-(13jwf-17wfj)=19fwj-(-4jwf)=19fwj+4jwf=23fjw$

Bemerkung:

Oft ist die 2.Möglichkeit,das „Zuerst- Berechnen" der Klammer nicht sinnvoll bzw. zielführend!

Nämlich dann, wenn in der Klammer **verschiedene Variable** stehen, was meist der Fall ist.

$$\frac{1}{9}x-\left(\frac{1}{3}x-7y\right)=\frac{1}{9}x-\left(\frac{x-21y}{3}\right)=\frac{x}{9}-\frac{x+21y}{3}=\frac{x-3x+63y}{9}=-\frac{2x}{9}+7y$$

Wir können höchstens in der Klammer auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Das Vorzeichen muss dann trotzdem nach den „Crash-regeln" geändert werden.

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **014**

Potenzen

Teil1

Beginn

Entstehung aus einer Multiplikation

Merke-01

Entstehung von Potenzen aus einer Multiplikation von Variablen

Merke für Variable als Basen:

Die Angabe in den Beispielen seien durch dein Zusammenfassen aus einer Multiplikation (Produkt) entstanden

---

Bei ungleichen Exponenten (Hochzahlen) und verschiedenen Basen :

bezüglich Ordnen:

niedrig(er)e Exponenten *werden zuerst geschrieben!!!!= ordnen der Größe nach (aufsteigend)*

oft wird aber auch der höchste Exponent zuerst geschrieben (absteigend)

oder dem Alphabet nach geordnet

Wir finden hier eine Ordnung nicht sinnvoll und sehen alle Varianten als richtig.

Sinnvoll ist nur die Polynomdefinitionsordnung- siehe Wissenschili (gleiche Basen und ungleiche Exponenten addiert)

Da das Kommutativgesetz bei der Multiplikation gilt, ist die Ordnung nicht primär.

Bsp.: $p^4 \cdot f^2 \cdot k^5 \cdot h^3 = f^2 \cdot h^3 \cdot p^4 \cdot k^5$ aufsteigend

$p^4 \cdot f^2 \cdot k^5 \cdot h^3 = k^5 \cdot p^4 \cdot h^3 \cdot f^2$ absteigend

$p^4 \cdot f^2 \cdot k^5 \cdot h^3 = f^2 \cdot h^3 \cdot k^5 \cdot p^4$ nach dem Alphabet (nicht vorteilhaft)

Achtung!!! Es kann nichts mehr weiter vereinfacht werden, da die Basen alle verschieden sind!

Das Multiplikationszeichen zwischen den Potenzen kann,muss aber nicht geschrieben werden!!!!

$p^4 \cdot f^2 \cdot e^6 = p^4 f^2 e^6$

Bei gleichen Exponenten (Hochzahlen) und verschiedenen Basen gilt:

Zur Ordnung:

Im Alphabet niedrig(er)e vorkommende Basen werden zuerst geschrieben!!!!= ordnen der Größe nach

Bsp.: $13w^3 \cdot g^3 \cdot k^3 \cdot h^3 \quad = 13g^3h^3 \cdot k^3 \cdot w^3$

Zahlen werden stets **an die Spitze** vorangestellt.

Achtung!!! Es kann nichts mehr weiter vereinfacht werden, da die Basen alle verschieden sind! (obwohl die Hochzahlen gleich sind)

Das Multiplikationszeichen zwischen den Potenzen kann,muss aber nicht geschrieben werden!!!! (es kann auch „gemischt“ werden)

Bemerkung für später:

Bei ungleichen Exponenten (Hochzahlen) und gleichen Basen gilt:

Du kannst nach den Regeln für Potenzen (siehe spätere Übungschili!) weiter zusammenfassen

Bsp.: $p^4 \cdot p^2 \cdot p^5 \cdot p^3 = p^{4+2+5+3} = p^{14}$ Vorgriff☹Blick in die Zukunft:

Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem die **Hochzahlen addiert** werden!!!

Dies gilt auch für ***gleiche Exponenten (Hochzahlen) und gleiche Basen***

Bsp.: $p^4 \cdot p^4 \cdot p^4 \cdot p^4 = p^{4+4+4+4} = p^{16}$

Merke-02

Für $0^n \quad n \geq 1 \qquad 1^n \quad n \geq 0 \; gilt:$

0 und 1 sind die einzigen Zahlen als Basen-mit Voraussetzung der obigen Gültigkeit-, die *nie ihren Potenzwert ändern* und als Zahl gleich bleiben!!!!

Das Multiplikationszeichen zwischen Potenzen mit Variablen als Basen kann, muss aber nicht geschrieben werden!!!!

$$p^4 \cdot f^2 \cdot k^5 \cdot h^3 = f^2 \cdot h^3 \cdot p^4 \cdot k^5 = f^2 h^3 p^4 k^5$$

Das Multiplikationszeichen zwischen Potenzen mit Variablen als Basen und Zahlen kann, muss aber nicht geschrieben werden!!!!

$$77 \cdot p^4 \cdot f^2 \cdot = 77 p^4 f^2 = 77 p^4 \cdot f^2$$

aber $77 \cdot p^4 \cdot 33 \cdot f^2 \cdot = 77 \bullet 33 p^4 f^2$ (klarerweise)

Das Multiplikationszeichen zwischen Potenzen mit Zahlen als Basen muss geschrieben werden!!!!

$77^4 \cdot 55^4 \cdot 67^2$ = 1443986935849005625 (TI N spire)

$77^4 \cdot 55^4 \cdot 67^2 \cdot g^6 \cdot i^2 = 77^4 \cdot 55^4 \cdot 67^2 \cdot i^2 \cdot g^6$ = 1443986935849005625 $i^2 \cdot g^6$

Merke-03

$\boxed{x^{0} = 1 \qquad x \geq 1}$

Wird eine Variable oder eine Zahl zum Exponenten **Null** erhoben, ist ihr Potenzwert (also das Ergebnis) immer **1.**

Beispiel:

$13^{0} = 1 \qquad \Phi^{0} = 1$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **015**

Potenzen

Teil2

Zusammenfassen in einer Addition oder Subtraktion von Potenztermen und deren Vereinfachung

Beispiele für Addition von Potenzen ohne gemischte Glieder als Produkt

Beispiel: $v^2 + d^3 + v^2 - s^3 + 5s^3 = 2v^2 + d^3 + 4s^3$

Schrittweises Zusammenfassen all jener Potenzen, deren Basis und Hochzahl jeweils gleich ist

Beispiel: $v^2 + d^3 + v^3 - s^3 + 5s^3 = v^2 + v^3 + d^3 + 4s^3$

Dabei werden **nur Zahlen vor den Potenzvariablen** addiert oder subtrahiert, die Potenzglieder (Faktoren mit Variablen und Potenzen) **bleiben gleich!!!!**

Beispiel: $44j^3 - 21j^3 = (44-21)j^3 = 23j^3$

Merke: Zusammenfassen:

$(Zahl \pm Zahl \pm ....) \bullet \text{ "}Buchstabe\ mit\ Hochzahl - immer\ gleich\text{"}$

Bsp.: $13c^3 + 2c^3 - 7c^3 = (13+2-7)\cdot c^3 = 8\cdot c^3 = 8c^3$

Zur Ordnung von Potenzen

(siehe auch Merke-01)

Fall: gleiche Basen- ungleiche Exponenten- bei Addition ***ohne gemischte Glieder als Produkt***

Die Polynomschreibweise

$4x^2 + 3x^4 + 2x - x^3 + 19$ ungeordnet!!

$3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 19$ geordnet- die *höchste Potenz zuerst* (absteigend) ist vorteilhaft

Beispiele für Addition von Potenzen mit gemischten Gliedern als Produkt

Musterbeispiel Nr.01 zu Ü1 (1))

Vereinfache und fasse soweit als möglich zusammen!!

$19fw + 2f^2w - 13w - 22f^2w + 6f - 4fw =$

Für *gemischte Termglieder* –> **z.B.** $24s^4 \cdot y$ oder $-33x \cdot e^5$ gilt

Es können nur all jene Potenzglieder (in Addition Summanden)weiter vereinfacht und zusammengefasst werden, die **in ihrer Potenz, also Basis** **und** **Variable** **auch im gemischten *Glied*** *als Faktoren in einer Multiplikation* völlig **identisch** sind!!!!

Beachte dabei das *Vertauschungsgesetz!* z.B. $24s^4 \cdot y = 24ys^4$

Dabei werden **nur Zahlen vor den Produkt-Potenzvariablen** addiert oder subtrahiert, die Potenzglieder (**Produkt-Potenzvariablen**) **bleiben gleich!!!!**

Beispiel: $27uh^3 - 21uh^3 = (27-21)uh^3 = 26uh^3$

Merke: Zusammenfassen:

$(Zahl \pm Zahl \pm ....) \bullet \text{"}Buchstaben\ mit\ Hochzahl(en) - immer\ gleich\text{"}$

Bsp.: $13zc^3 + 2zc^3 - 7c^3z = (13+2-7) \cdot zc^3 = 8 \cdot zc^3 = 8zc^3$

Stelle dir vor-siehe Übungsleuchtturm Nr.012-Zusammenfassen von Termen:

$13zc + 2zc - 7cz = (13+2-7) \cdot zc = 8 \cdot zc = 8zc$

nur jetzt ist noch eine Hochzahl dabei

13 Big Kebab(s) plus 2 Big Kebab dazu und 7 Big Kebab weniger (wegnehmen) sind 15 Big Kebabs minus 7 Big Kebabs, also 8 Big Kebabs!

Das Wort Big Kebab (immer gleich) ist jetzt nur ersetzt durch zc^3

*Beachte: steht **keine Zahl** vor der Potenzvariable:* $xy = 1xy$!!!!!

Bsp.: $uh^3 - 2uh^3 = (1-2)uh^3 = -uh^3$

----→

In unserem Beispiel sind gleich:

-> zusammengefasst werden können daher:

$19fw$ *und* $-4fw$ *Teilzusammenfassen:* $=+5fw$

$2f^2w$ *und* $-22f^2w$ *Teilzusammenfassen:* $-20f^2w$

alleine stehen: (sie haben kein entsprechendes 2.oder weiteres gleiches Glied zum Weiter-vereinfachen)

$-13w$ sowie

$6f$

diese Potenzglieder müssen unverändert stehen gelassen werden.

→wir ordnen *nach den zusammengehörigen (Potenz-)Gliedern*

$19fw-4fw+2f^2w-22f^2w-13w+6f=$ *(jetziges Zusammenfasen oder Blick auf obige Teilzusammenfassungen)->*

$$\boxed{=5fw-20f^2w-13w+6f}$$

Beachte:

Natürlich gilt bei der Multiplikation (Auftreten eines Produkts im gemischten Glied!)das Vertauschungsgesetz (KG der Multiplikation) !

$2f^2w=2wf^2$ *und* $-22f^2w=-22wf^2$

In diesem Sinne vertauschte Produkte können natürlich zusammengefasst werden!!

Musterbeispiel Nr.02 zu Ü2 (2))

Vereinfache und fasse soweit als möglich zusammen!!

$$22k^5 - 3z^5 + 12z^3 - 6z^5n + 18z^4 - 19z^3n + 13nz^5 - 707 =$$

Für *gemischte Termglieder* –> **z.B.** $24s^4 \cdot y$ oder $-33x \cdot e^5$ gilt

Es können nur all jene Potenzglieder (in Addition Summanden)weiter vereinfacht und zusammengefasst werden, die **in ihrer Potenz, also Basis** **und** **Variable** ***auch im gemischten Glied*** *als Faktoren in einer Multiplikation* völlig **identisch** sind!!!!

Beachte dabei das *Vertauschungsgesetz!* z.B. $24s^4 \cdot y = 24ys^4$

Dabei werden **nur Zahlen vor den Produkt-Potenzvariablen** addiert oder subtrahiert, die Potenzglieder selbst(**Produkt-Potenzvariablen**) **bleiben gleich!!!!**

Beispiel: $27uh^3 - 21uh^3 = (27-21)uh^3 = 26uh^3$

Merke: Zusammenfassen:

$$(Zahl \pm Zahl \pm ....) \bullet \text{"}Buchstaben\ mit\ Hochzahl(en) - immer\ gleich\text{"}$$

Bsp.: $13zc^3 + 2zc^3 - 7c^3z = (13+2-7)\cdot zc^3 = 8 \cdot zc^3 = 8zc^3$

Stelle dir vor-siehe Übungschili Nr.012-Zusammenfassen von Termen:

$$13zc + 2zc - 7cz = (13+2-7)\cdot zc = 8 \cdot zc = 8zc$$

nur jetzt ist noch eine Hochzahl dabei

13 Big Kebab(s) plus 2 Big Kebab dazu und 7 Big Kebab weniger (wegnehmen) sind 15 Big Kebabs minus 7 Big Kebabs, also 8 Big Kebabs!

Das Wort Big Kebab (immer gleich) ist jetzt nur ersetzt durch zc^3

*Beachte: steht **keine Zahl** vor der Potenzvariable:* $xy = 1xy$!!!!!

Bsp.: $uh^3 - 2uh^3 = (1-2)uh^3 = -uh^3$

In unserem Beispiel sind gleich:

-> zusammengefasst werden können daher:

---→

$13n \cdot z^5 = 13z^5 n$ *nach dem Vertauschungsgesetz!!!*

gleich sind nur:

zusammengefasst werden können daher:

$-6z^5 n \quad und \quad +13z^5 n$ *Teilzusammenfassen:* $= \quad +7z^5 n$

alle anderen Potenzglieder müssen unverändert stehen gelassen werden.

$$22k^5 - 3z^5 + 12z^3 - 6z^5 n + 18z^4 - 19z^3 n + 13z^5 n - 707 =$$
$$\boxed{= 22k^5 - 3z^5 + 12z^3 + 7z^5 n + 18z^4 - 19z^3 n - 707}$$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu **Übungsleuchtturm** **016**

Potenzen

Teil3

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis

Musterbeispiele

Musterbeispiele zur Multiplikation von Potenzen gleicher Basis

Musterbeispiel Nr.001 zu Ü7

Berechne, fasse soweit als möglich zusammen. Schreibe auch als Potenz!!!

$$j^8 y^4 + j^8 \cdot j^{26} \cdot 4 \cdot j^7 \cdot 42 \cdot j^{37} =$$

Wir haben eine Summe, also Addition.

In den Summanden können wir (nur!)alle Potenzen multiplizieren**, deren Basen gleich** sind.

$$j^8 y^4 + j^8 \cdot j^{26} \cdot 4 \cdot j^7 \cdot 42 \cdot j^{37} = j^8 y^4 + j^{8+26+7+37} \cdot 4 \cdot 42 = j^8 y^4 + j^{78} \cdot 168 =$$
$$j^8 y^4 + 168 j^{78}$$

Dies ist das Endergebnis. Nun können wir *nicht mehr weiter vereinfachen*!

Im ersten Summand steht ein gemischtes Glied $j^8 y^4 \textit{nicht mit } j^{78} \textit{zusammenfassbar}$

Musterbeispiel Nr.002 zu Ü8

Berechne, fasse soweit als möglich zusammen. Schreibe auch als Potenz!!!

$$e^8 f^5 + e^8 \cdot f^5 + 5 \cdot e^{10} \cdot 83 \cdot e^9 = 2e^8 f^5 + 5 \cdot e^{10} \cdot 83 \cdot e^9 = 2e^8 f^5 + 415 e^{19}$$

Dies ist das Endergebnis. Nun können wir *nicht mehr weiter vereinfachen*!

Im ersten Summand steht ein gemischtes Glied $e^8 f^5 \textit{nicht mit } e^{19} \textit{zusammenfassbar}$

Musterbeispiel Nr.003 zu Ü9

Berechne, fasse soweit als möglich zusammen. Schreibe auch als Potenz!!!

$s^8 y^4 + (s^8 \cdot y^4 + 4 \cdot s^7) \cdot 7 \cdot s^7 =$

Da eine Multiplikation mit einer Addition in Klammer vorliegt, müssen wir das

Verteilungsgesetz anwenden!!!!

$s^8 y^4 + (s^8 \cdot y^4 + 4 \cdot s^7) \cdot 7 \cdot s^7 = s^8 y^4 + s^8 \cdot y^4 \cdot 7 \cdot s^7 + 4 \cdot s^7 \cdot 7 \cdot s^7 =$

In jedem der3 Summanden fassen wir alle Potenzen gleicher Basis multiplizierend zusammen

$= 7 s^{15} y^4 + 28 s^{14} + s^8 y^4$

Musterbeispiel Nr.004 zu Ü10

Berechne, fasse soweit als möglich zusammen. Schreibe auch als Potenz!!!

$s^8 y^4 - s^8 \cdot y^4 - 4 \cdot s^7 \cdot 7 \cdot s^7 =$

Da die beiden ersten Glieder in Basen und Hochzahlen gleich sind, können sie subtrahiert werden, was Null ergibt. (das Multiplikationszeichen im 1.Glied muss ja nicht gesetzt werden)

Übrig bleibt nur mehr das dritte Glied, in dem die Faktoren mit gleichen Potenzen multiplizierend zusammengefasst werden können.

$s^8 y^4 - s^8 \cdot y^4 - 4 \cdot s^7 \cdot 7 \cdot s^7 = \quad 0 - 28 \cdot s^{14} \quad = -28 \cdot s^{14}$

Musterbeispiel Nr.005 zu Ü11

Berechne, fasse soweit als möglich zusammen. Schreibe auch als Potenz!!!

$$s^{14}y^4 - s^8 \cdot y^4 - 4 \cdot s^7 \cdot 7 \cdot s^7 =$$

Das 3.Glied können wir nach den Regeln des Multiplizierens von Potenzen gleicher Basis vereinfachend weiter zusammenfassen.

$$s^{14}y^4 - s^8 \cdot y^4 - 4 \cdot s^7 \cdot 7 \cdot s^7 = s^{14}y^4 - s^8 \cdot y^4 - 28 \cdot s^{14}$$

*Da nun in keinem der 3 Glieder alle Basen und Hochzahlen gleich sind, können sie **nicht subtrahiert** werden!!!!! (das Multiplikationszeichen im 1.Glied muss ja nicht gesetzt werden)*

Wir können nicht mehr weiter vereinfachen!!!!!

Musterbeispiele zur Division von Potenzen gleicher Basis

Musterbeispiel Nr.001 zu Ü8- Division

Berechne *auf 2 Arten, idem du durchgehend Schritt für Schritt nach den Potenzregeln vorgehst!:*

$$\frac{\frac{77^{66}}{77^{4}}}{\frac{77^{13}}{77^{7}}} =$$

Art 1:

$$\frac{\frac{77^{66}}{77^{4}}}{\frac{77^{13}}{77^{7}}} = \rightarrow Doppelbruch\ auflösen = \frac{77^{66} \cdot 77^{7}}{77^{4} \cdot 77^{13}} =$$

$$\rightarrow Zähler\ und\ Nenner\ getrennt\ ausrechnen\ (Hochzahlen\ addieren) \rightarrow$$

$$\frac{77^{66+7}}{77^{4+13}} = \frac{77^{73}}{77^{17}} = 77^{73-17} = 77^{56}$$

Das Ergbnis lassen wir in Potenzschreibweise stehen. Es ist zu hoch für den TR,nur mit TI N

spire möglich,allerdings gibt es zuviele Stellen anzuschreiben!

Art 2:

$$\frac{\frac{77^{66}}{77^{4}}}{\frac{77^{13}}{77^{7}}} = \rightarrow nach\ den\ \mathrm{Re}\,ge\ln der\ Potenzdivision\ den\ Zählerbruch\ und\ Nennerbruch\ getrennt\ ausrechnen$$

$$= \frac{77^{66-4}}{77^{13-7}} = \frac{77^{62}}{77^{6}} = 77^{62-6} = 77^{56}$$

<u>Beachte, dass alle Basen für diese Lösung gleich sein müssen!!!!</u>

Musterbeispiel Nr.002 zu Ü9- Division

$$\frac{37^9 \cdot 9^{17}}{37^5 \cdot 9^8} =$$

Berechne **auf 2 Arten**

1.) mit den Potenzregeln

2.) mit Kürzen als Beweis !(zerlege die Potenzen in Produkte, dann tust du dir leichter beim Kürzen)

1.) mit den Potenzregeln

$$\frac{37^9 \cdot 9^{17}}{37^5 \cdot 9^8} = \frac{37^9}{37^5} \bullet \frac{9^{17}}{9^8} = 37^{9-5} \cdot 9^{17-8} = 37^4 \cdot 9^9 = = 1874161 \cdot 387420489 = 726088371084729$$

2.) mit Kürzen als Beweis !

$$\frac{37^9 \cdot 9^{17}}{37^5 \cdot 9^8} = \frac{\underbrace{37 \cdot .... \cdot 37}_{9mal} \bullet \underbrace{9 \cdot .... \cdot 9}_{17mal}}{37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = Wegstreichen\ aller 37er\ und\ 9er\ im Nenner$$

$$= \frac{37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \bullet \underbrace{9 \cdot .... \cdot 9}_{8mal}}{1} = 37^4 \cdot 9^9$$

=726088371084729

später: beim Kürzen von Potenzen werden die Hochzahlen subtrahiert!

Definition

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad x, y \in Z^+$

*Potenzen mit gleicher Basis werden **multipliziert**, indem die (ihre) **Hochzahlen (Exponenten) addiert werden.***

Bsp.: $f^9 \cdot f^8 = f^{9+8} = f^{17}$

Bemerkung:

Alle Feststellungen gelten analog für Zahlen als Basen. Diese sind am Ende dann wieder mit dem Taschenrechner berechenbar. (siehe Lösungsteil am Ende!)

Beispiel: $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9 = 19683$

Ohne eine Formel zur Vereinfachung für die Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis zu kennen, könntest du natürlich Potenzen mit Zahlenbasen gleich ausrechnen und extra multiplizieren.

Beispiel: $3^4 = 81 \qquad 3^5 = 243 \qquad \Rightarrow 3^4 \cdot 3^5 = 81 \cdot 24 = 19683$

Treten mehrere Potenzen gleicher Basis in einem Produkt als Faktoren auf, so gilt die Regel analog. Alle Exponenten werden addiert.

$$r^{12} \cdot r^{37} \cdot r^{14} = r^{12+37+14} = r^{63} = \underbrace{r \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot r}_{63 mal}$$

*Der Taschenrechner und **Computer-algebraprogramme wie TI Nspire** rechnen in der Grundeingabe (im Allgemeinen) Potenzrechnungen wie z.B.* $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9 = 19683$ *gleich als eine Zahl im Ergebnis aus*

$3^4 \cdot 3^5$	19683

Mit gewissen Sonderbefehlen wie dem factor-befehl können aber auch Vereinfachungen in der gewünschten Potenzschreibweise dargestellt werden!

$\text{factor}\left(3^4 \cdot 3^5\right)$	3^9

Hier sehen wir schön die Vielfältigkeit des Programms.

Näheres lies dazu bitte in der entsprechenden TI Nspire Übungschili Nr.011 zu Eingabe von Potenzen nach!

Definition

$$a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a \neq 0 \qquad x, y \in Z^+$$

*Potenzen mit gleicher Basis werden **dividier**t, indem die **Hochzahlen (Exponenten)***

subtrahiert werden.

Bsp.: $g^{17} : g^{13} = \frac{g^{17}}{g^{13}} = g^{17-13} = g^4$

Bemerkung:

Alle Feststellungen gelten analog für Zahlen als Basen. Diese sind am Ende dann wieder mit dem Taschenrechner berechenbar. (*siehe Lösungsteil am Ende*!)

Beispiel: $\frac{4^{13}}{4^5} = 4^8 = 65536$

Was passiert wenn die Potenz im Zähler niedriger ist als jene im Nenner???

Bsp.: $\frac{g^{13}}{g^{17}} = g^{13-17} = g^{-4}$ *sprich: „ g hoch Minus 4"*

es gibt also auch negative Hochzahlen, sie werden dann in der 6.Klasse erst weiter ausgerechnet!!

Bsp.: $\frac{g^{13}}{g^{17}} = g^{13-17} = g^{-4}$ *sprich: „ g hoch Minus 4"*

es gibt also auch negative Hochzahlen, sie werden dann in der 6.Klasse erst weiter ausgerechnet!!

Hinweis: der TR rechnet natürlich nur mit Zahlen, nicht mit Variablen: $s^8 \cdot s^{26}$ kann er weder anzeigen noch ausrechnen

Potenzrechnungen wie z.B. $13^{13} \cdot 13^4$ rechnet er gleich als *eine Zahl im Ergebnis aus*, unser Modell zerlegt nicht als „Zwischenpotenz „= $13^{13+4} = 13^{17}$ er rechnet 13^{17} gleich „geheim" aus. (kann aber das Ergebnis nicht in einer Zahl anzeigen!!)

Computeralgebraprogramme *wie TI N spire von Texas Instruments können dies sehr wohl: (und das Ergebnis in einer Zahl anzeigen!!) (wenn ein bestimmter Befehl „Faktorisieren" eingesetzt wird)*

Der Taschenrechner und Computeralgebraprogramme wie TI Nspire rechnen in der Grundeingabe (im Allgemeinen) Potenzrechnungen wie z.B. $\frac{4^{13}}{4^5} = 4^{13-5} = 4^8 = 65536$ *gleich als eine Zahl ohne Potenzdarstellung im Ergebnis aus*

$\frac{4^{13}}{4^5}$	65536

Mit gewissen Sonderbefehlen wie dem factor-und expand-befehl können aber auch Vereinfachungen in der gewünschten Potenzschreibweise dargestellt werden!

$\text{factor}\left(\frac{4^{13}}{4^5}\right)$	2^{16}
$\text{expand}\left(2^{16}\right)$	65536
$\text{expand}\left(\frac{4^{13}}{4^5}\right)$	65536

*Hier sehen wir schön die Vielfältigkeit des Programms.Näheres lies dazu bitte im entsprechenden **TI Nspire Übungsleuchturm Nr.011** zu Eingabe von Potenzen nach!*

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm 017

=Übungskapitel

Potenzen

Teil4

Potenzieren eines Produkts und Potenzieren eines Quotienten (eines Bruchs)- Potenzieren von Potenzen

Potenzieren eines Produkts

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad x \in Z^+$

Ein Produkt wird mit einer Hochzahl bei einer Klammer potenziert, indem *jeder einzelne Faktor* mit dieser Hochzahl bei dieser Klammer potenziert wird

Beachte Die Hochzahl von $a \quad und \quad b = 1$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad = (a^1 \cdot b^1)^x \quad = (a^1)^x \cdot (b^1)^x$!!!!!!! $\quad x \in Z^+$

Bsp.: $(12 \cdot m)^2 = 12^2 \cdot m^2 \quad = 144m^2 = (12^1 \cdot m^1)^2 \quad = (12^1)^2 \cdot (m^1)^2$!!!!!!!

Es gilt für mehrere Faktoren:

$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

Weiterführung:

$(y^k)^p = y^{k \cdot p}$

Eine <u>Potenz</u> wird potenziert, indem die Hochzahlen **multipliziert** werden.

$(x^k \cdot y^m)^p = (x^k)^p \cdot (y^m)^p = x^{k \cdot p} \cdot y^{m \cdot p}$

Ein Produkt, deren Faktoren Potenzen mit Hochzahlen **ungleich 1** sind wird potenziert, indem *<u>jeder einzelne Faktor</u>* potenziert wird und dabei die Hochzahlen in der Klammer mit der Hochzahl bei der Klammer stehend **multipliziert** wird.

Dies gilt natürlich auch für 1 als Hochzahlen-dieser leichteste Fall ist oben in dieser Definition inkludiert, aber extra behandelt.

Potenzieren eines Quotienten

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad b \neq 0 \quad x \in Z^+$$

Ein Quotient wird mit einer Hochzahl bei einer Klammer potenziert, indem sein ***Dividend und sein Divisor extra*** **mit dieser Hochzahl bei dieser Klammer potenziert wird**

oder:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Potenzieren eines Bruchs

Ein Bruch wird mit einer Hochzahl bei einer Klammer potenziert, indem sein ***Zähler und sein Nenner extra*** **getrennt mit dieser Hochzahl bei dieser Klammer potenziert wird**

Ein Bruch wird potenziert, indem Zähler und Nenner (mit derselben Potenz) ***extra potenziert*** werden

$$\boxed{\left(\frac{x^k}{y^m}\right)^p = \frac{\left(x^k\right)^p}{\left(y^m\right)^p} = \frac{x^{k \cdot p}}{y^{m \cdot p}}}$$

Ein Bruch (Quotient), dessen Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) Potenzen mit Hochzahlen **ungleich 1** sind wird potenziert, indem ***Zähler und Nenner extra*** **potenziert** wird und dabei die Hochzahlen in der Klammer mit der Hochzahl bei der Klammer stehend **multipliziert** wird.

Dies gilt natürlich auch für 1 als Hochzahlen-dieser leichteste Fall ist oben in dieser Definition inkludiert, aber extra behandelt

Musterbeispiele

Musterbeispiel Nr.001 **siehe Ü6 Teil1**

Berechne und vereinfache soweit als möglich:

$$((-41)\cdot(-h)\cdot p)^5 =$$

Nach der Formel des Potenzierens eines Produkts (inkludiert den Fall des Potenzierens von Potenzen mit der Hochzahl1) wird jeder einzelne Faktor in der Klammer potenziert und die Hochzahlen multipliziert

$$(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x \quad x\in Z^+$$

Ein Produkt wird mit einer Hochzahl bei einer Klammer potenziert, indem *jeder einzelne Faktor* mit dieser Hochzahl bei dieser Klammer potenziert wird

$$\boxed{(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x \quad = \left(a^1\cdot b^1\right)^x \quad = \left(a^1\right)^x\cdot\left(b^1\right)^x !!!!!! \qquad x\in Z^+}$$

$$\textit{wir denken uns}: \left((-41)^1\cdot(-h)^1\cdot p^1\right)^5 \Longrightarrow 1\cdot 5 = 5$$

$$=(-41)^5\cdot(-h)^5\cdot p^5 =$$

Nun wenden wir die Regel für das Potenzieren mit **einer ungeraden** Hochzahl an. Das Vorzeichen **Minus bleibt bei ungeraden Exponenten (Hochzahlen)erhalten**.

$$=\left(-41^5\right)\cdot(-h^5)\cdot p^5 =$$

Wir potenzieren die Zahl aus

$$=(-115856201)\cdot\left(-h^5\right)\cdot p^5 = -115856201\cdot\left(-h^5\right)\cdot p^5 =$$

$$\boxed{= +115856201\cdot h^5 p^5 \rightarrow \textit{weil Minus mal Minus} \quad \textit{ergibt} \quad \textit{Plus}}$$

Beachte: Aufgrund der Vorzeichenregeln für Potenzen bleibt das Minus für eine **ungerade** Hochzahl erhalten.

$$(-f)^7 = -f^7 \qquad (-13)^7 = -13^7$$

Musterbeispiel Nr.002 **siehe Ü7 Teil1**

Berechne nach der **Formel** für das Potenzieren von Potenzen

Schreibe in Potenzschreibweise und vereinfache soweit als möglich!

$$\left(18s^5 \cdot 21c^4 \cdot 11a^6\right)^3 =$$

Nach der Formel des Potenzierens eines Produkts wird jeder einzelne Faktor in der Klammer potenziert und die Hochzahlen multipliziert

$$\boxed{\left(y^k\right)^p = y^{k \cdot p}}$$

Eine <u>Potenz</u> wird potenziert, indem die Hochzahlen **multipliziert** werden.

$$\boxed{\left(x^k \cdot y^m\right)^p = \left(x^k\right)^p \cdot \left(y^m\right)^p = x^{k \cdot p} \cdot y^{m \cdot p}}$$

Ein Produkt, deren Faktoren Potenzen mit Hochzahlen **ungleich 1** sind wird potenziert, indem *<u>jeder einzelne Faktor</u>* potenziert wird und dabei die Hochzahlen in der Klammer mit der Hochzahl bei der Klammer stehend **multipliziert** wird.

$$18^3 \cdot \left(s^5\right)^3 \cdot 21^3 \cdot \left(c^4\right)^3 \cdot 11^3 \cdot \left(a^6\right)^3$$ ->

Nach der Formel des Potenzierens eines Produkts

wird jeder einzelne Faktor in der Klammer potenziert und die Hochzahlen multipliziert

$$= 5832s^{15} \cdot 9261c^{12} \cdot 1331a^{18}$$

Die Zahlen können noch ausmultipliziert werden

$\boxed{=71887512312\,a^{18} \cdot c^{12} \cdot s^{15}}$ (mit TI N spire) nach dem Alphabet geordnet

Fortsetzung nächste Seite →

Beweis für deine richtige Rechnung:

Zerlege nun als 2.neuen Schritt *in der Klammer die Potenzen in ein Produkt* und potenziere hoch 3. Fasse alle Potenzen gleicher Basis dann zusammen! (siehe Übungschili Nr.016)

(dies entspricht dem 1.Schritt in Ü5*)

$$\left(18s^5 \cdot 21c^{4\cdot} \cdot 11a^6\right)^3 = \left(18 \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot 21 \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot 11 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a\right)^3$$

$$\left(18s^5 \cdot 21c^{4\cdot} \cdot 11a^6\right)^3 =$$

in der Klammer die Potenzen in ein Produkt zerlegt:

$$\left(18 \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot 21 \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot 11 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a\right)^3 =$$

alle Potenzen gleicher Basis dann zusammengefasst

$$= 18^3 \cdot s^3 \cdot s^3 \bullet .... \bullet a^3 =$$

$$\rightarrow \textit{Addieren der Hochzahlen gleicherBasis} \quad \textit{und Zahlen auspotenzieren} \rightarrow$$
$$= 5832s^{15} \cdot 9261c^{12} \cdot 1331a^{18}$$

$\boxed{=71887512312\, a^{18} \cdot c^{12} \cdot s^{15} \quad \text{(mit TI N spire)}}$

Musterbeispiel Nr.003 **siehe Ü7 Teil2**

Berechne nach der **neuen obigen Formel** für das Potenzieren von Potenzen

$$\left(\frac{12hg^3}{7y^4}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad b \neq 0 \quad x \in Z^+$$

Ein Quotient wird mit einer Hochzahl bei einer Klammer potenziert, indem sein ***Dividend und sein Divisor extra*** **mit dieser Hochzahl bei dieser Klammer potenziert wird**

$$\boxed{\left(\frac{x^k}{y^m}\right)^p = \frac{(x^k)^p}{(y^m)^p} = \frac{x^{k \cdot p}}{y^{m \cdot p}}}$$

Ein Bruch (Quotient), dessen Zähler und Nenner (Dividend und Divisor) Potenzen mit Hochzahlen **ungleich 1** sind wird potenziert, indem ***Zähler und Nenner extra*** **potenziert** wird und dabei die Hochzahlen in der Klammer mit der Hochzahl bei der Klammer stehend **multipliziert** wird.

Dies gilt natürlich auch für 1 als Hochzahlen-dieser leichteste Fall ist oben in dieser Definition inkludiert, aber extra behandelt

$$= \left(\frac{12hg^3}{7y^4}\right)^3 = \frac{(12^1)^3 \cdot (h^1)^3 \cdot (g^3)^3}{(7^1)^3 \cdot (y^4)^3} = \frac{12^3 \cdot h^3 \cdot g^9}{7^3 \cdot y^{12}} =$$

$= \boxed{\frac{1728g^9h^3}{343y^{12}}}$ wir haben g vor h geordnet-nach dem Alphabet.

Beweis für deine richtige Rechnung:

Zerlege nun als 2.neuen Schritt in der Klammer in **Zähler und Nenner die Potenzen in ein Produkt** und quadriere. Fasse alle Potenzen gleicher Basis dann zusammen! (siehe Übungsleuchtturm Nr.016)

(dies entspricht dem 1.Schritt in Ü6*)

$$=\left(\frac{12hg^3}{7y^4}\right)^3 = \left(\frac{12\cdot h\cdot g\cdot g\cdot g}{7\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y}\right)^3 = \frac{12^3\cdot h^3\cdot g^3\cdot g^3\cdot g^3}{7^3\cdot y^3\cdot y^3\cdot y^3\cdot y^3} =$$

$$=\boxed{\frac{1728g^9h^3}{343y^{12}}}$$ wir haben g vor h geordnet-nach dem Alphabet.

wir sehen: *wird eine Potenz **potenziert**, so werden die Hochzahlen multipliziert!!!!*

Musterbeispiel Nr.004 **siehe Ü8 Teil2**

Berechne und stelle auf verschiedene Arten in einer **Potenzschreibweise** dar! Vereinfache dann soweit als möglich.

$$\left(\frac{13^4 \cdot 4^9}{13^2 \cdot 4^4}\right)^4 =$$

1.Art:

Potenzieren nach unserer Formel für das Potenzieren von Potenzen

$$\left(\frac{13^4 \cdot 4^9}{13^3 \cdot 4^4}\right)^2 = \frac{\left(13^4\right)^2 \cdot \left(4^9\right)^2}{\left(13^3\right)^2 \cdot \left(4^4\right)^2} = \frac{13^8 \cdot 4^{18}}{13^6 \cdot 4^8} = \frac{815730721 \cdot 68719476736}{4826809 \cdot 65536} = \boxed{177209344}$$

mit TI N spire berechnet.

2.Art:

Aus der vorigen Übungschili Nr.016 wissen wir:

2 Potenzen gleicher Basis werden dividiert, indem ihre Hochzahlen subtrahiert werden

entspricht dem Kürzen

$$\left(\frac{13^4 \cdot 4^9}{13^3 \cdot 4^4}\right)^2 = \left(\frac{13^4}{13^3} \bullet \frac{4^9}{4^4}\right) = \left(13^{4-3} \cdot 4^{9-4}\right)^2 = (13^1 \cdot 4^5)^2 = \left(13 \cdot 1024\right)^2 = 13312^2 =$$

$$= \boxed{177209344}$$

Musterbeispiel Nr.004 **siehe Ü8 Teil3**

Schreibe zuerst als Potenz, und rechne dann erst mit dem Taschenrechner aus!

Gib alle möglichen Darstellungsarten an!!!! Vereinfache dann soweit als möglich!!!

$$\left(\frac{23}{24}h^5 \cdot 13k^4\right)^2 = \left(\frac{23}{24} \cdot h^5 \cdot 13 \cdot k^4\right)^2$$

In der Klammer liegt ein Produkt vor

Im Produkt der Klammer befindet sich ein Bruch (Quotient), der ebenfalls nach den Potenzregeln quadriert werden muss. (Zähler **und** Nenner werden quadriert!!)

Dazu brauchen wir folgende Formeln:

Nach der Formel des Potenzierens eines Produkts wird jeder einzelne Faktor in der Klammer potenziert und die Hochzahlen multipliziert

$$\boxed{\left(y^k\right)^p = y^{k \cdot p}}$$

Eine Potenz wird potenziert, indem die Hochzahlen **multipliziert** werden.

$$\boxed{\left(x^k \cdot y^m\right)^p = \left(x^k\right)^p \cdot \left(y^m\right)^p = x^{k \cdot p} \cdot y^{m \cdot p}}$$

Ein Produkt, deren Faktoren Potenzen mit Hochzahlen **ungleich 1** sind wird potenziert, indem *jeder einzelne Faktor* potenziert wird und dabei die Hochzahlen in der Klammer mit der Hochzahl bei der Klammer stehend **multipliziert**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad b \neq 0 \quad x \in Z^+$$

Ein Quotient wird mit einer Hochzahl bei einer Klammer potenziert, indem sein ***Dividend und sein Divisor extra*** **mit dieser Hochzahl bei dieser Klammer potenziert wird**

$$\left(\frac{23}{24}h^5\cdot 13k^4\right)^2=\left(\frac{23}{24}\right)^2\cdot\left(h^5\right)^2\cdot 13^2\cdot\left(k^4\right)^2=$$

Ein Produkt wird potenziert, indem jeder einzelne Faktor potenziert wird.

$$=\frac{23^2}{24^2}\cdot h^{5\bullet 2}\cdot 13^2\cdot k^{4\bullet 2}=$$

$$=\frac{529}{576}\cdot h^{10}\cdot 169\cdot k^8=\frac{529\cdot 169}{576}h^{10}k^8=$$

$$\boxed{=\frac{89401}{576}h^{10}k^8}$$

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm 020

=Übungskapitel 3.&UE klasse

Multiplizieren von Binomen

und mehrgliedrigen Termen

Musterbeispiele

Musterbeispiel Nr.001 **zu Ü2 Teil1**

Berechne (durch Ausmultiplizieren der beiden Binome)

$$(22u-17y)\cdot(39y+23u)=$$

Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{22u}^{1}\overbrace{-17y}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{39y}_{3}\underbrace{+23u}_{4}\right)=$$

Merkregel für die 1.Art:

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\ 22u\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\ 39y+$

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\ 22u\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus $(+)\ 23u+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $(-17y)\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\ 39y+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $(-17y)\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $(+)\ 23u$

Daher lautet die Rechnung:

$(22u-17y)\cdot(39y+23u)=$ ist auszumultiplizieren

nach der **obigen Regel** also

$=22u\cdot 39y+22u\cdot 23u+(-17y)\cdot 39y+(-17y)\cdot 23u=$

Nun kommen wieder die Regeln für Potenzen vor.

$=858uy+506u^2-663y^2-391yu=$

$858uy \quad und \ -391yu$ sind nach dem Vertauschungsgesetz in ihren Variablen gleich, daher können wir diese zusammenfassen!

$858uy-391yu=467uy$

Nun ordnen wir die Quadrate vor.

$\rightarrow=506u^2-663y^2+467yu$

Wir stellen nun am Ende das Ergebnis in der Form der Anordnung

Quadratpotenz(-term) $\pm$ **gemischtes Glied** $\pm$ **Quadratpotenz(-term)** dar

Dies hat einen bestimmten Grund. Näheres folgt in Musterbsp 003.

$$\boxed{(22u-17y)\cdot(39y+23u)=506u^2+467yu-663y^2}$$

Entscheide selbst, welche Art 1oder 2 dir sympathischer ist. Du brauchst dir nur eine zu merken.

Ich führe ab Musterbsp 003 nur mehr <u>die 1.Art aus,</u> da ich diese besser finde.

oder:

Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{22u}^{1}\overbrace{-17y}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{39y}_{3}\underbrace{+23u}_{4}\right)=$$

Merkregel für die 2.Art:

Wir zeigen hier im 1.Musterbeispiel 2 Arten für das Multiplizieren von

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 2. Glied der 1.Klammer (2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer(3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer(1) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer (4) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$$\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\ 22u\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\ 39y+$

Vorzeichen mitgenommen) 2. Glied der 1.Klammer (2) mal $(-17y)\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\ 39y+$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\ 22u\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)plus $(+)\ 23u+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $(-17y)\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $(+)\ 23u$

Daher lautet die Rechnung:

$(22u-17y)\cdot(39y+23u)=$ ist auszumultiplizieren

nach der **obigen Regel** also

$=22u\cdot 39y+(-17y)\cdot 39y+22u\cdot 23u+(-17y)\cdot 23u=$

Nun kommen wieder die Regeln für Potenzen vor.

$=858uy-663y^2+506u^2-391yu=$

$858uy \quad und \; -391yu$ sind nach dem Vertauschungsgesetz in ihren Variablen gleich, daher können wir diese zusammenfassen!

$858uy-391yu=467uy$

Nun ordnen wir die Quadrate vor.

$\to= 506u^2-663y^2+467yu$

Wir stellen nun am Ende das Ergebnis in der Form der Anordnung

Quadratpotenz(-term) $\pm$ **gemischtes Glied** $\pm$ **Quadratpotenz(-term)** dar

Dies hat einen bestimmten Grund. Näheres folgt in Musterbsp 003.

$$\boxed{(22u-17y)\cdot(39y+23u)=506u^2+467yu-663y^2}$$

Entscheide selbst, welche Art 1oder 2 dir sympathischer ist. Du brauchst dir nur eine zu merken.

Ich führe ab Musterbsp 003 nur mehr <u>die 1.Art aus,</u> da ich diese besser finde.

Musterbeispiel Nr.002 **zu Ü6 Teil1 (höhere Potenzen enthalten)**

Berechne (durch Ausmultiplizieren der beiden Binome)

$$\left(14s^3 - 9m^4\right) \cdot \left(-17m^5 - 11s^2\right) =$$

Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{14s^3}^{1}\overbrace{-9m^4}^{2}\right) \cdot \left(\underbrace{-17m^5}_{3}\underbrace{-11s^2}_{4}\right) =$$

Merkregel für die leichteste 1.Art:

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$$\boxed{1 \bullet 3 + 1 \bullet 4 + 2 \bullet 3 + 2 \bullet 4}$$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,14s^3 \bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $-17m^5 +$

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,14s^3 \bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus $-11s^2 +$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $-9m^4 \bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $-17m^5 +$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $-9m^4 \bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $-11s^2$

Daher lautet die Rechnung:

$(14s^3 - 9m^4)\cdot(-17m^5 - 11s^2) =$ ist zu ausmultiplizieren

nach der **obigen Regel** also $\boxed{1 \bullet 3 + 1 \bullet 4 + 2 \bullet 3 + 2 \bullet 4}$

$= 14s^3 \cdot (-17m^5) + 14s^3 \cdot (-11s^2) + (-9m^4)\cdot(-17m^5) + (-9m^4)\cdot(-11s^2) =$

Nun kommen wieder die Regeln für Potenzen vor.

Beachte:

$14s^3 \cdot (-11s^2) = \rightarrow + \bullet - = - \rightarrow -14 \cdot 11s^3 \cdot s^2 = -154s^{3+2} = -154s^5$

Plus mal Minus ergibt Minus!

$(-9m^4)\cdot(-17m^5) = +9 \cdot 17m^{4+5} = +153m^9$

Minus mal Minus ergibt plus!!!!!

2 Potenzen **gleicher Basis werden multipliziert**, indem ihre **Hochzahlen addiert** werden!!!!

(siehe Übungsleuchtturm Nr.016- Teil3)

$$\boxed{(14s^3 - 9m^4)\cdot(-17m^5 - 11s^2) = = -238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^4s^2}$$

Es kann nicht mehr weiter vereinfacht werden. WH:

In einer Addition oder Subtraktion müssten in gemischten Gliedern **beide Potenzen in Basis und Hochzahl** gleich sein, um weiter zusammenfassen zu können!!!

Bsp: $-238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^4s^2$

$= -238m^5s^3 + 99m^4s^2$ nicht mehr weiter vereinfachbar; Basen sind zwar gleich ,aber die Hochzahlen nicht.

Würde die Angabe

$-238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^5s^3$ lauten, können folgende 2 Glieder zusammengefasst werden:

$-238m^5s^3 + 99m^5s^3 = (-238 + 99)m^5s^3 = -139m^5s^3$

Entscheidend ist die Addition oder Subtraktion. Multipliziert kann immer werden!!!!

$-238m^5s^3 + 99m^5s^3 = (-238 + 99)m^5s^3 = -139m^5s^3$

$-238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^5s^3 \quad -139m^5s - 154s^5 + 153m^9$

oder:

Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{14s^3}^{1}\overbrace{-9m^4}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{-17m^5}_{3}\underbrace{-11s^2}_{4}\right)=$$

Merkregel für die 2.Art:

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 2. Glied der 1.Klammer (2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer(3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer(1) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer (4) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$$\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,14s^3\,\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $-17m^5\,+$

Vorzeichen mitgenommen) 2. Glied der 1.Klammer (2) mal $-9m^4\,\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $-17m^5\,+$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,14s^3\,\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)plus $-11s^2$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $-9m^4\,\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $-11s^2$

Daher lautet die Rechnung:

$(14s^3 - 9m^4)\cdot(-17m^5 - 11s^2) =$ ist zu ausmultiplizieren

nach der **obigen Regel** also $\boxed{1 \bullet 3 + 2 \bullet 3 + 1 \bullet 4 + 2 \bullet 4}$

$= 14s^3 \cdot (-17m^5) + (-9m^4)\cdot(-17m^5) + 14s^3 \cdot (-11s^2) + +(-9m^4)\cdot(-11s^2) =$

Nun kommen wieder die Regeln für Potenzen vor.

Beachte:

$14s^3 \cdot (-11s^2) = \rightarrow + \bullet - = - \rightarrow -14 \cdot 11s^3 \cdot s^2 = -154s^{3+2} = -154s^5$

Plus mal Minus ergibt Minus!

$(-9m^4)\cdot(-17m^5) = +9 \cdot 17m^{4+5} = +153m^9$

Minus mal Minus ergibt plus!!!!!

2 Potenzen **gleicher Basis werden multipliziert**, indem ihre **Hochzahlen addiert** werden!!!!

(siehe Übungsleuchtturm Nr.016- Teil3)

$$\boxed{(14s^3 - 9m^4)\cdot(-17m^5 - 11s^2) = = -238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^4s^2}$$

Es kann nicht mehr weiter vereinfacht werden. WH:

In einer Addition oder Subtraktion müssten in gemischten Gliedern **beide Potenzen in Basis und Hochzahl** gleich sein, um weiter zusammenfassen zu können!!!

Bsp: $-238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^4s^2$

$= -238m^5s^3 + 99m^4s^2$ nicht mehr weiter vereinfachbar; Basen sind zwar gleich ,aber die Hochzahlen nicht.

Fortsetzung nächste Seite

Würde die Angabe

$-238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^5s^3$ lauten, können folgende 2 Glieder zusammengefasst werden:

$-238m^5s^3 + 99m^5s^3 = (-238 + 99)m^5s^3 = -139m^5s^3$

Entscheidend ist die Addition oder Subtraktion. Multipliziert kann immer werden!!!!

$-238m^5s^3 + 99m^5s^3 = (-238 + 99)m^5s^3 = -139m^5s^3$

$-238m^5s^3 - 154s^5 + 153m^9 + 99m^5s^3 - 139m^5s - 154s^5 + 153m^9$

Musterbeispiel Nr.003 **zu Ü12 Teil2**

Berechne (durch Ausmultiplizieren der beiden Binome)

$(23e+21c)\cdot(23e+21c)=$ **„everyone with oneevery"**

Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{23e}^{1}+\overbrace{21c}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{23e}_{3}+\underbrace{21c}_{4}\right)=$$

Merkregel für die leichteste Art- 1.Art:

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,23e\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\,23e+$

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,23e\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus $(+)\,21c+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $(+)\,21c\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\,23e+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $(+)\,21c\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $(+)\,21c$

Wir führen hier nur mit der 1.Art aus!!! Rechne selbst nach der 2.Art aus!!!

Daher lautet die Rechnung:

$(23e+21c)\cdot(23e+21c)=$ ist zu ausmultiplizieren

Uns fällt auf, dass in beiden Produktklammern dieselben Eintragungen=Summen (Binome) stehen.

nach der **obigen Regel** also $\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$

$(29a+17d)\cdot(29a+17d)=23e\cdot 23e+23e\cdot 21c+21c\cdot 23e+21c\cdot 21c$

2 Potenzen **gleicher Basis werden multipliziert**, indem ihre **Hochzahlen addiert** werden!!!!

(siehe Übungsleuchtturm Nr.016- Teil3)hier nur „Hoch1"

$=23e\cdot 23e+23e\cdot 21c+21c\cdot 23e+21c\cdot 21c=529e^2+483ec+483ce+441c^2$

Tritt ein Produkt („mal") zweier Klammern auf, in denen 2mal dasselbe Binom (Summe oder Differenz) steht, so tritt 2 mal in der Mitte der Rechnung nach dem Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel dasselbe gemischte Glied (identisches Vorzeichen!) auf. Dieses kann immer „in der Mitte" zu einem gemischten Glied „2 mal……" zusammengefasst werden.

Hier: $483ec+483ce$ Dies gilt auch für eine Angabe mit höheren Potenzen als 1!!

Die beiden Produktvariablen Hier: $ec=ce$ nach dem Vertauschungsgesetz lassen sich somit zusammenfassen zu $2\bullet$………. Dies ist das **gemischte Glied.**

$\rightarrow 483ec+483ce=2\cdot 483ce=966ce$

$(23e+21c)\cdot(23e+21c)==529\,e^2+483\,ec+483\,ce+441\,c^2==529e^2+966ce+441c^2$

Solche Multiplikationen, bei denen ein Produkt („mal") zweier Klammern auftritt, in denen 2mal dasselbe Binom (Summe oder Differenz) mit einer Hochzahl 1 steht, haben als Lösung (die nicht mehr weiter vereinfachbar ist) immer folgende Struktur

Quadratpotenz(-term)1	$\pm$	**gemischtes Glied**	$+$	**Quadratpotenz(-term)2**

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „everyone with oneevery".In unserem Beispiel hier wäre es die 1.BIFO Wir wissen bereits:

$(23e+21c)\cdot(23e+21c)=(23e+21c)^2$ siehe nächster Übungsleuchtturm

Musterbeispiel Nr.004 **zu Ü20 Teil2**

Berechne (durch Ausmultiplizieren der beiden Binome)

$\left(8i^3-13k^3\right)\cdot\left(8i^3+13k^3\right)=$ **„everyone with oneevery“**

Wir merken,dass sich die Binome in den Produktklammern nur durch ihr Rechenzeichen unterscheiden. Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{8i^3}^{1}\overbrace{-13k^2}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{8i^3}_{3}\underbrace{+13k^2}_{4}\right)=$$

Merkregel für die leichteste Art- 1.Art:

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) **mal**

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) **plus**

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) **mal**

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) **plus**

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) **mal**

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) **plus**

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) **mal**

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) **mal** $(+)\,8i^3\,\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) **plus** $(+)\,8i^3\,+$

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) **mal** $(+)\,8i^3\,\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) **plus** $(+)\,13k^2\,+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) **mal** $(+)\,13k^2\,\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) **plus** $(+)\,8i^3\,+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) **mal** $(+)\,13k^2\,\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $(+)\,13k^2$

$$\left(8i^3 - 13k^3\right)\cdot\left(8i^3 + 13k^3\right) = \boxed{1 \bullet 3 + 1 \bullet 4 + 2 \bullet 3 + 2 \bullet 4}$$

$$8i^3 \cdot 8i^3 + 8i^3 \cdot 13k^3 + \left(-13k^3\right)\cdot 8i^3 + \left(-13k^3\right)\cdot 13k^3 =$$

2 Potenzen **gleicher Basis werden multipliziert**, indem ihre **Hochzahlen addiert** werden!!!!

(siehe Übungsleuchtturm Nr.016- Teil3)

$$64i^6 + 104i^3k^3 - 104k^3i^3 - 169k^6 = 64i^6 + 0 - 169k^6$$

Tritt ein Produkt („mal“) zweier Klammern auf, dessen Binome in den Produktklammern sich nur durch ihr mittleres Rechen(Vor-)zeichen unterscheiden, so treten in der Mitte der Rechnung beim Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel 2 gemischte Glieder auf,die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden- mit derselben Vorzahl und Variable - einmal mit Vorzeichen plus, einmal mit Minus. Diese beiden Glieder fallen stets weg (heben sich auf)!!!!

Hier: $+104i^3k^3 - 104k^3i^3 = 0$

Dies gilt auch für eine Angabe mit höheren Potenzen als 1!!

$$64i^6 + 104i^3k^3 - 104k^3i^3 - 169k^6 = 64i^6 - 169k^6$$

Solche Multiplikationen haben als Lösung (die nicht mehr weiter vereinfachbar ist) immer folgende Struktur **für eine Hochzahl 1:**

Quadratpotenz(-term)1 – (minus) **Quadratpotenz(-term)2**

Für eine Angabe mit **höheren Potenzen als 1!!**

Bei uns: **Quadratierter Potenzterm 1** –(minus) **Quadratierter Potenzterm 2**

Hochzahl größer als 2 Hochzahl größer als 2

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „ everyone with oneevery“. In unserem Beispiel hier wäre es die 3.BIFO

siehe nächster Übungsleuchtturm

Theorie:

Merkregel für das Multiplizieren zweier Binome:

-> Siehe vorige Musterbeispiele!!!

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm **021**

=Übungskapitel **und**

Die binomischen Formeln

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm **022**

=Übungskapitel

Chill dein Wissen

Binomische Formeln-Grundkompetenzen

..und Potenzen

Merkregel für Binomische Formeln:

-> Siehe auch nun folgende Musterbeispiele!!!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \ \textit{HIER MINUS VORNE!!}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 + b^2 -> \textit{für uns nicht berechenbar = zerlegbar!!!}$$

a............1.Glied *b.......2.Glied*

Musterbeispiele

Musterbeispiel Nr.001

Berechne nach den Binomischen Formeln durch Einsetzen.

Alternativtext: ***Berechne nach einer dir bekannten Formel ohne die Binome auszumultiplizieren!***

Schreibe als Probe die Angabe anders an und multipliziere die Binome aus!

$$(13w - 33k)^2 =$$

Aufgrund der vorliegenden Angabe, **ein Minus als Rechenzeichen in der Mitte der Klammer**, liegt die **2.Binomische Formel** vor.

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

$$\boxed{\begin{array}{l} (Nummer1 - Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 - 2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) + (Nummer2)^2 \\ \rightarrow 1.Rechenzeichen\ MINUS\ !! \qquad 2.BinomischeFormel \quad (2.BIFO) \end{array}}$$

$$Nummer1 = 13w = 13 \cdot w$$
$$Nummer2 = 33k = 33 \cdot k$$

Beachte, dass die Nummer 1 aus einem Produkt bestehen kann wie hier, es muss nicht nur ein Ausdruck sein. Im Produkt können auch Potenzen vorkommen.

Die Nummer 1 ist also „alles, was **vor** dem Rechenzeichen in der Mitte steht".

Die Nummer 2 ist also „alles, was **nach** dem Rechenzeichen in der Mitte steht".

Das Minus hier wird beim Formel Einsetzen nicht „mitgenommen", es spielt keine Rolle!

In der Literatur wird das 1.Glied oft mit a, das 2.Glied mit b bezeichnet.

$$Nummer1 = 1.Glied = a \qquad 13w = 13 \cdot w$$
$$Nummer2 = 2.Glied = b \qquad 33k = 33 \cdot k$$

Somit lautet die 2.BIFO (Binomische Formel)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \rightarrow 1.\text{Re}chenzeichen\ MINUS\ !!$$

Ich meine, genauso richtig ist:

(Näheres im nächsten Übungsleuchtturm später)

$$(g-f)^2 = g^2 - 2 \cdot g \cdot f + f^2 \rightarrow 1.\text{Re}chenzeichen\ MINUS\ !!$$

Stelle dir die Angabe als folgende Darstellung vor:

$$(13w - 33k)^2 =$$

$$\left(\overbrace{13w}^{Nummer1} - \underbrace{33k}_{Nummer2} \right)^2 =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (Nummer1 - Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 - 2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) + (Nummer2)^2 \\ \rightarrow 1.\text{Re}chenzeichen\ MINUS\ !! \qquad 2.BinomischeFormel \quad (2.BIFO) \end{array}}$$

$$(Nummer1)^2 = (13w)^2 = (13 \cdot w)^2 = \Rightarrow nach\ der\ Formel\ für\ das\ Potenzieren\ eines\ \text{Pr}odukts \rightarrow$$
$$= 13^2 \cdot w^2 = 169w^2$$

$$2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) = 2 \bullet (13w) \cdot (33k) = 858w \cdot k = 858wk$$

$$(Nummer2)^2 = (33k)^2 = (33 \cdot k)^2 = \Rightarrow nach\ der\ Formel\ für\ das\ Potenzieren\ eines\ \text{Pr}odukts \rightarrow$$
$$= 33^2 \cdot k^2 = 1089k^2$$

$$\left(\overbrace{13w}^{Nummer1} - \underbrace{33k}_{Nummer2}\right)^2 = 169w^2 \underbrace{-}_{kommt\ von\ der\ Formel} 858wk \underbrace{+}_{kommt\ von\ der\ Formel} 1089k^2$$

Die Rechenzeichen werden von der Formel fix vorbestimmt.(siehe kleine Markierung oben)

Das mittlere Rechenzeichen (alleine)hat für das 2.Glied keinen Einfluss auf das Vorzeichen!

Be (ob)achte, dass die geschwungene Klammer erst bei 33 beginnt!

Das Minus hier wird beim Formel Einsetzen nicht „mitgenommen“, es spielt keine Rolle!

Nun sind wir mit unserer Rechnung fertig.

Wir schreiben nun unsere Angabe „anders“ an:

$$(13w-33k)^2 = (13w-33k)\cdot(13w-33k)$$

Wir wissen aus dem Übungsleuchtturm Nr.020 vom Multiplizieren zweier Binome: Zitat:

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „everyone with oneevery“.

Tritt ein Produkt („mal“) zweier Klammern auf, in denen 2mal dasselbe Binom (Summe oder Differenz) steht, so tritt 2 mal in der Mitte der Rechnung nach dem Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel dasselbe gemischte Glied (identisches Vorzeichen!) auf. Dieses kann immer „in der Mitte“ zu einem gemischten Glied „2 mal……“ zusammengefasst werden.

$\boxed{\text{Quadratpotenz(-term)1}} \pm \boxed{\text{gemischtes Glied}} + \boxed{\text{Quadratpotenz(-term)2}}$

$$169w^2 \underbrace{-}_{kommt\ von\ der\ Formel} 858wk \underbrace{+}_{kommt\ von\ der\ Formel} 1089k^2$$

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$(13w-33k)^2=(13w-33k)\cdot(13w-33k)$ **„everyone with oneevery“**

Stelle dir das Produkt als folgende Darstellung vor:

$$\left(\overbrace{13w}^{1}\overbrace{-33k}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{13w}_{3}\underbrace{-33k}_{4}\right)=$$

Merkregel für die leichteste Art- 1.Art:

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4)

$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$

→

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,13w\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\,13w+$

(Vorzeichen mitgenommen) 1. Glied der 1.Klammer (1) mal $(+)\,13w\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) plus $-33k+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $-33k\bullet$

(Vorzeichen mitgenommen) 1.Glied der 2.Klammer (3) plus $(+)\,13w+$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 1.Klammer(2) mal $-33k\bullet$

(Rechenzeichen als Vorzeichen mitgenommen) 2.Glied der 2.Klammer(4) $-33k$

$$\left(\overbrace{13w}^{1}\overbrace{-33k}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{13w}_{3}\underbrace{-33k}_{4}\right)=(+)\,13w\bullet(+)\,13w+(+)\,13w\bullet+(-33k)+(-33k)\bullet(+)\,13w+$$
$$+(-33k)\bullet(-33k)$$

$13^2 = 169 \qquad 33^2 = 1089$

das 2.und 3.Glied fassen wir zu einem gemischten Glied zusammen (wir wissen dass in der Binomischen Formel ein mittleres gemischtes Glied vorkommen muss)

$$13w \bullet (-33k) + (-33k) \bullet 13w = -13 \cdot 33kw - 13 \cdot 33kw = -2 \bullet 13 \cdot 33 \cdot kw = -858kw$$

wirerhalten:

$$\left(\overbrace{13w}^{Nummer 1} - \underbrace{33k}_{Nummer 2} \right)^2 = 169w^2 - 858wk + 1089k^2$$

2.Art wäre: $\boxed{1 \bullet 3 + 2 \bullet 3 + 1 \bullet 4 + 2 \bullet 4}$ *siehe Übungsleuchtturm Nr.020*

Musterbeispiel Nr.002zuÜ2-2

Berechne nach den Binomischen Formeln durch Einsetzen.

Alternativtext: ***Berechne nach einer dir bekannten Formel ohne die Binome auszumultiplizieren!***

Schreibe als <u>Probe</u> die Angabe anders an und multipliziere die Binome aus!

$$(5eh - 15wyz)^2 =$$

Aufgrund der vorliegenden Angabe, **ein Minus als Rechenzeichen in der Mitte der Klammer,** liegt die **2.Binomische Formel** vor.

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

$$(Nummer1 - Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 - 2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) + (Nummer2)^2$$
$$\rightarrow 1.\text{Re}chenzeichen\ MINUS\ !! \qquad 2.BinomischeFormel \quad (2.BIFO)$$

$$Nummer1 = 5eh = 5 \cdot e \cdot h$$
$$Nummer2 = 15wyz = 15 \cdot w \cdot y \cdot z$$

Beachte, dass die Nummer 1 aus einem Produkt bestehen kann wie hier,es muss nicht 1 Ausdruck nur sein. Im Produkt können auch Potenzen vorkommen.

Die Nummer 1 ist also „alles, was **vor** dem Rechenzeichen in der Mitte steht“.

Die Nummer 2 ist also „alles, was **nach** dem Rechenzeichen in der Mitte steht“.

Das Minus hier wird beim Formel Einsetzen nicht „mitgenommen“, es spielt keine Rolle!

In der Literatur wird das 1.Glied oft mit a, das 2.Glied mit b bezeichnet.

$$Nummer1 = 1.Glied = a \qquad = 5eh = 5 \cdot e \cdot h$$
$$Nummer2 = 2.Glied = b \qquad = 15wyz = 15 \cdot w \cdot y \cdot z$$

Somit lautet die 2.BIFO (Binomische Formel)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \rightarrow 1.\text{Re}chenzeichen\ MINUS\ !!$$

Stelle dir die Angabe als folgende Darstellung vor:

$$(5eh - 15wyz)^2 =$$

$$\left(\overbrace{5eh}^{Nummer1} \; - \underbrace{15wyz}_{Nummer\,2} \right)^2 =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (Nummer1 - Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 - 2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) + (Nummer2)^2 \\ \rightarrow 1.\,Rechenzeichen\ MINUS\ !! \qquad 2.BinomischeFormel \quad (2.BIFO) \end{array}}$$

$$(Nummer1)^2 = (5eh)^2 = (5 \cdot e \cdot h)^2 = \Longrightarrow nach\ der\ Formel\ für\ das\ Potenzieren\ eines\ Produkts \rightarrow$$
$$= 5^2 \cdot e^2 \cdot h^2 = 25e^2h^2 \rightarrow Beachte\ dass\ JEDER\ einzelne\ Faktor\ potenziert(quadriert)\ wird$$

$$2 \bullet Nummer1 \bullet Nummer2 = 2 \bullet (5eh) \cdot (15wyz) = 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot ehwyz = 150ehwyz$$

$$(Nummer2)^2 = (15wyz)^2 = (15 \cdot w \cdot y \cdot z)^2 = \Longrightarrow nach\ der\ Formel\ für\ das\ Potenzieren\ eines\ Produkts \rightarrow$$
$$= 15^2 \cdot w^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 225w^2y^2z^2 \rightarrow geordnet$$
$$\rightarrow Beachte\ dass\ JEDER\ einzelne\ Faktor\ potenziert(quadriert)\ wird$$

$$\left(\overbrace{5eh}^{Nummer1} \; - \underbrace{15wyz}_{Nummer\,2} \right)^2 = \boxed{25e^2h^2 \quad \underbrace{-}_{kommt\ von\ der\ Formel} \quad 150ehwyz \quad \underbrace{+}_{kommt\ von\ der\ Formel} \quad 225w^2y^2z^2}$$

Die Rechenzeichen werden von der Formel fix vorbestimmt.(siehe kleine Markierung oben)

Das mittlere Rechenzeichen (alleine)hat für das 2.Glied keinen Einfluss auf das Vorzeichen!

Be(ob)achte,dass die geschwungene Klammer erst bei 15 beginnt!

Das Minus hier wird beim Formel Einsetzen nicht „mitgenommen", es spielt keine Rolle!

Zum Fall dass das *1.Glied* ein negatives Vorzeichen hat: siehe nächster Leuchtturm

Nun sind wir mit unserer Rechnung fertig.

Wir schreiben nun unsere Angabe „anders" an:

$$(5eh-15wyz)^2=(5eh-15wyz)\cdot(5eh-15wyz)$$

Wir wissen aus dem Übungsleuchtturm Nr.020 vom Multiplizieren zweier Binome: Zitat:

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „everyone with oneevery".

Tritt ein Produkt („mal") zweier Klammern auf, in denen 2mal dasselbe Binom (Summe oder Differenz) steht, so tritt 2 mal in der Mitte der Rechnung nach dem Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel dasselbe gemischte Glied (identisches Vorzeichen!) auf. Dieses kann immer „in der Mitte" zu einem gemischten Glied „2 mal……" zusammengefasst werden.

Quadratpotenz(-term)1 $\pm$ **gemischtes Glied** $+$ **Quadratpotenz(-term)2**

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$$(5eh-15wyz)^2=(5eh-15wyz)\cdot(5eh-15wyz)$$

$$\left(\overbrace{5eh}^{1}-\overbrace{15wyz}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{5eh}_{3}-\underbrace{15wyz}_{4}\right)=$$

$\boxed{1\bullet3+1\bullet4+2\bullet3+2\bullet4}$ oder $\boxed{1\bullet3+2\bullet3+1\bullet4+2\bullet4}$

$$\left(\overbrace{5eh}^{1}-\overbrace{15wyz}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{5eh}_{3}-\underbrace{15wyz}_{4}\right)=\boxed{25e^2h^2-150ehwyz+225w^2y^2z^2}$$

Musterbeispiel Nr.003zuÜ2-4

Berechne nach den Binomischen Formeln durch Einsetzen.

Alternativtext: ***Berechne nach einer dir bekannten Formel ohne die Binome auszumultiplizieren!***

Schreibe als <u>Probe</u> die Angabe anders an und multipliziere die Binome aus!

$$\left(\frac{4}{14}t^4 + s^3c^5\right)^2 =$$

Aufgrund der vorliegenden Angabe,**ein Plus als Rechenzeichen in der Mitte der Klammer,**liegt die **1.Binomische Formel** vor.

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

$$\boxed{\begin{array}{l} (Nummer1 + Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 + 2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) + (Nummer2)^2 \\ NUR \quad PLUS \qquad 1.BinomischeFormel \quad (1.BIFO) \end{array}}$$

$$Nummer1 = \frac{4}{14}t^4 = \frac{4}{14} \cdot t^4$$
$$Nummer2 = s^3c^5 = s^3 \cdot c^5$$

Beachte, dass die Nummer 1 aus einem Produkt bestehen kann wie hier,es muss nicht 1 Ausdruck nur sein. Im Produkt können auch Potenzen vorkommen.

Die Nummer 1 ist also „alles, was **vor** dem Rechenzeichen in der Mitte steht“.

Die Nummer 2 ist also „alles, was **nach** dem Rechenzeichen in der Mitte steht“.

In der Literatur wird das 1.Glied oft mit a, das 2.Glied mit b bezeichnet.

$$Nummer1 = 1.Glied = a \qquad = \frac{4}{14}t^4 = \frac{4}{14}\cdot t^4$$

$$Nummer2 = 2.Glied = b \qquad s^3c^5 = s^3\cdot c^5$$

Somit lautet die 1.BIFO (Binomische Formel)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \rightarrow NUR \quad PLUS!$$

genauso richtig:

$$(i+u)^2 = i^2 + 2\cdot i\cdot u + u^2$$

Stelle dir die Angabe als folgende Darstellung vor:

$$\left(\frac{4}{14}t^4 + s^3c^5\right)^2 =$$

$$\left(\overbrace{\frac{4}{14}}^{Nummer1}t^4 + \underbrace{s^3c^5}_{Nummer2}\right)^2 =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(Nummer1 + Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 + 2\bullet(Nummer1)\bullet(Nummer2) + (Nummer2)^2 \\ \rightarrow NUR\ PLUS\ !! \qquad 1.BinomischeFormel \quad (1.BIFO)\end{array}}$$

$$(Nummer1)^2 = \left(\frac{4}{14}t^4\right)^2 = \left(\frac{4}{14}\cdot t^4\right)^2 = \!\!\to nach\ der\ Formel\ \ für\ das\ Potenzieren\ eines\ \mathrm{Pr}\,odukts \to$$

$$= \left(\frac{4}{14}\right)^2 \cdot \left(t^4\right)^2 \to Beachte\ dass\ JEDER\ einze\ln e\ Faktor\ \ potenziert(quadriert)\ wird$$

$$\to \left(\frac{4}{14}\right)^2 = nach\ derFormel\ \ für\ das\ Potenzieren\ eines\ Quotienten \to \frac{4^2}{14^2} = \frac{16}{196} \to$$

$$\left(t^4\right)^2 \to Hochzahlen\ werden\ multipliziert \to = t^{4\bullet 2} = t^8$$

$$(Nummer1)^2 = \frac{16}{196}\cdot t^{4\bullet 2} = \frac{16}{196}\cdot t^8$$

$$2 \bullet Nummer1 \bullet Nummer2 = 2 \bullet \left(\frac{4}{14}t^4\right)\cdot\left(s^3c^5\right) = \frac{8}{14}\cdot t^4\cdot s^3c^5 =$$

$$= \!\!\to k\ddot{u}rzen \to = \frac{4}{7}c^5s^3t^4 \to geordnet\ nach\ Basen\ alphabetisch$$

$$(Nummer2)^2 = \left(s^3c^5\right)^2 = \left(s^3\cdot c^5\right)^2 = \!\!\to Beachte\ dass\ JEDER\ einze\ln e\ Faktor\ \ potenziert(quadriert)\ wird$$

$$\left(s^3\right)^2\cdot\left(c^5\right)^2 \to nach\ der\ \ Formel\ \ für\ das\ Potenzieren\ einesPotenz \to$$

$$Hochzahlen\ werden\ multipliziert \to$$

$$(Nummer2)^2 = s^{3\cdot 2}\cdot c^{5\cdot 2} = s^6c^{10}$$

$$\left(\overbrace{\frac{4}{14}t^4}^{Nummer1} + \underbrace{s^3c^5}_{Nummer2}\right)^2 = \boxed{\frac{16}{196}\cdot t^8 \underbrace{+}_{kommt\ von\ der\ \ Formel} \frac{4}{7}c^5s^3t^4 \underbrace{+}_{kommtvonderFormel} s^6c^{10}}$$

Da das mittlere Rechenzeichen ein Plus ist, "kann nichts passieren", wir brauchen keine Überlegungen wie vorhin bei Minus mit der Mitnahme des Rechen/Vorzeichens anstellen.

Nun sind wir mit unserer Rechnung fertig.

Wir schreiben nun unsere Angabe „anders" an:

$$\left(\frac{4}{14}t^4 + s^3c^5\right)^2 = \left(\frac{4}{14}t^4 + s^3c^5\right)\cdot\left(\frac{4}{14}t^4 + s^3c^5\right)$$

Wir wissen aus dem Übungsleuchtturm Nr.020 vom Multiplizieren zweier Binome: Zitat:

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „everyone with oneevery“.

Tritt ein Produkt („mal“) zweier Klammern auf, in denen 2mal dasselbe Binom (Summe oder Differenz) steht, so tritt 2 mal in der Mitte der Rechnung nach dem Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel dasselbe gemischte Glied (identisches Vorzeichen!) auf. Dieses kann immer „in der Mitte“ zu einem gemischten Glied „2 mal……“ zusammengefasst werden.

$\boxed{\text{Quadratpotenz(-term)1}} \pm \boxed{\text{gemischtes Glied}} + \boxed{\text{Quadratpotenz(-term)2}}$

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$$\left(\frac{4}{14}t^4+s^3c^5\right)^2=\left(\frac{4}{14}t^4+s^3c^5\right)\cdot\left(\frac{4}{14}t^4+s^3c^5\right)$$

$$\left(\overbrace{\frac{4}{14}}^{1}t^4\overbrace{+s^3c^5}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{4}{14}}_{3}t^4\underbrace{+s^3c^5}_{4}\right)=$$

$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$ oder $\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$

$$\left(\overbrace{\frac{4}{14}}^{1}t^4\overbrace{+s^3c^5}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{4}{14}}_{3}t^4\underbrace{+s^3c^5}_{4}\right)=\boxed{\frac{16}{196}\cdot t^8+\frac{4}{7}c^5s^3t^4+s^6c^{10}}$$

Musterbeispiel Nr.004zuÜ4

Berechne nach den Binomischen Formeln durch Einsetzen.

Alternativtext: ***Berechne nach einer dir bekannten Formel ohne die Binome auszumultiplizieren!***

Schreibe als <u>Probe</u> die Angabe anders an und multipliziere die Binome aus!

$$\left(\frac{5}{6}f+\frac{19}{20}q\right)^2=$$

Aufgrund der vorliegenden Angabe,**ein Plus als Rechenzeichen in der Mitte der Klammer,**liegt die **1.Binomische Formel** vor.

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

$$(Nummer1+Nummer2)^2=(Nummer1)^2+2\bullet(Nummer1)\bullet(Nummer2)+(Nummer2)^2$$
$$NUR\quad PLUS\qquad 1.Binomische Formel\quad (1.BIFO)$$

$$Nummer1=\frac{5}{6}f=\frac{5}{6}\cdot f$$
$$Nummer2=\frac{19}{20}q=\frac{19}{20}\cdot q$$

Beachte, dass die Nummer 1 aus einem Produkt bestehen kann wie hier,es muss nicht 1 Ausdruck nur sein. Im Produkt können auch Potenzen vorkommen.

Die Nummer 1 ist also „alles, was **vor** dem Rechenzeichen in der Mitte steht".

Die Nummer 2 ist also „alles, was **nach** dem Rechenzeichen in der Mitte steht".

In der Literatur wird das 1.Glied oft mit a, das 2.Glied mit b bezeichnet.

$$Nummer1 = 1.Glied = a \qquad = \frac{5}{6}f = \frac{5}{6}\cdot f$$

$$Nummer2 = 2.Glied = b \qquad \frac{19}{20}q = \frac{19}{20}\cdot q$$

Somit lautet die 1.BIFO (Binomische Formel)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \rightarrow NUR \quad PLUS!$$

genauso richtig:

$$(i+u)^2 = i^2 + 2\cdot i\cdot u + u^2$$

Stelle dir die Angabe als folgende Darstellung vor:

$$\left(\frac{5}{6}f + \frac{19}{20}q\right)^2 =$$

$$\left(\overbrace{\frac{5}{6}f}^{Nummer1} + \underbrace{\frac{19}{20}q}_{Nummer2}\right)^2 =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(Nummer1 + Nummer2)^2 = (Nummer1)^2 + 2 \bullet (Nummer1) \bullet (Nummer2) + (Nummer2)^2 \\ \rightarrow NUR\ PLUS\ !! \qquad 1.BinomischeFormel \quad (1.BIFO)\end{array}}$$

$$(Nummer1)^2 = \left(\frac{5}{6}f\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\cdot f\right)^2 = \!\rightarrow nach\ der\ Formel\ für\ das\ Potenzieren\ eines\ \Pr odukts \rightarrow$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot (f)^2 \rightarrow Beachte\ dass\ JEDER\ einze\ln e\ Faktor\ potenziert(quadriert)\ wird$$

$$\rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 = nach\ derFormel\ für\ das\ Potenzieren\ eines\ Quotienten \rightarrow \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36} \rightarrow$$

$$(f)^2 = f^2 \rightarrow Denkedir: Hochzahlen\ werden\ multipliziert \rightarrow = f^{1\bullet 2} = f^2$$

$$(Nummer1)^2 = \frac{25}{36}\cdot f^2$$

$$2 \bullet Nummer1 \bullet Nummer2 = 2 \bullet \left(\frac{5}{6}f\right)\cdot\left(\frac{19}{20}q\right) = \frac{10}{6}\cdot\frac{19}{20}fq \rightarrow\rightarrow 2\cdot\frac{5}{6} = \frac{2\cdot 5}{6}$$

$$= \!\rightarrow k\ddot{u}rzen \rightarrow = \frac{19}{12}fq \rightarrow geordnet\ nach\ Basen\ alphabetisch$$

$$(Nummer2)^2 = \left(\frac{19}{20}q\right)^2 = \left(\frac{19}{20}\right)^2\cdot q^2 = \!\rightarrow Beachte\ dass\ JEDER\ einze\ln e\ Faktor\ potenziert(quadriert)\ wird$$

$$\frac{19^2}{20^2}\cdot q^2 \rightarrow nach\ der\ Formel\ für\ das\ Potenzieren\ einesQoutienten \rightarrow$$

$$(Nummer2)^2 = \frac{361}{400}q^2$$

$$\left(\overbrace{\frac{5}{6}f}^{Nummer1} + \underbrace{\frac{19}{20}q}_{Nummer2}\right)^2 = \boxed{\frac{25}{36}\cdot f^2 \underbrace{+}_{kommt\ von\ der\ Formel} \frac{19}{12}fq \underbrace{+}_{kommtvonderFormel} \frac{361}{400}q^2}$$

Das mittlere Rechenzeichen (alleine)hat für das 2.Glied keinen Einfluss auf das Vorzeichen!

Nun sind wir mit unserer Rechnung fertig.

Wir schreiben nun unsere Angabe „anders“ an:

$$\left(\frac{5}{6}f + \frac{19}{20}q\right)^2 = \left(\frac{5}{6}f + \frac{19}{20}q\right)\cdot\left(\frac{5}{6}f + \frac{19}{20}q\right)$$

Wir wissen aus dem Übungsleuchtturm Nr.020 vom Multiplizieren zweier Binome: Zitat:

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „everyone with oneevery".

Tritt ein Produkt („mal") zweier Klammern auf, in denen 2mal dasselbe Binom (Summe oder Differenz) steht, so tritt 2 mal in der Mitte der Rechnung nach dem Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel dasselbe gemischte Glied (identisches Vorzeichen!) auf. Dieses kann immer „in der Mitte" zu einem gemischten Glied „2 mal……" zusammengefasst werden.

Quadratpotenz(-term)1 $\pm$ **gemischtes Glied** $+$ **Quadratpotenz(-term)2**

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$$\left(\frac{5}{6}f+\frac{19}{20}q\right)^2=\left(\frac{5}{6}f+\frac{19}{20}q\right)\cdot\left(\frac{5}{6}f+\frac{19}{20}q\right)$$

$$\left(\overbrace{\frac{5}{6}f}^{1}+\overbrace{\frac{19}{20}q}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{5}{6}f}_{3}+\underbrace{\frac{19}{20}q}_{4}\right)=$$

$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$ oder $\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$

$$\left(\overbrace{\frac{5}{6}f}^{1}+\overbrace{\frac{19}{20}q}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{5}{6}f}_{3}+\underbrace{\frac{19}{20}q}_{4}\right)=\boxed{\frac{25}{36}\cdot f^2+\frac{19}{12}fq+\frac{361}{400}q^2}$$

Musterbeispiel Nr.005 **zuÜ9&Ü10**

Berechne nach den Binomischen Formeln

$\left(4f-5t\right)\left(4f+5t\right)=$ oder

$\left(4f+5t\right)\left(4f-5t\right)=$ *(klar nach dem Vertauschungsgesetz)*

Alternativtext:

Berechne nach einer dir bekannten Formel ohne die Binome auszumultiplizieren!

Multipliziere als <u>Probe</u> die Angabe-die Binome- aus!

Wir merken, dass sich die Binome in den Produktklammern nur durch ihr Rechenzeichen unterscheiden.*“dasselbe einmal plus, einmal minus“*

Aufgrund dieser vorliegenden Angabe liegt die **3.Binomische Formel** vor.

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

$$\left(Nummer1-Nummer2\right)\cdot\left(Nummer1+Nummer2\right)=(Nummer1)^2-(Nummer2)^2$$
$$MINUS\ zwischen\ den\ beiden\ Quadrattermen \qquad 3.BinomischeFormel \quad (3.BIFO)$$

$$Nummer1 = 4f = 4 \cdot f$$
$$Nummer2 = 5t = 5 \cdot t$$

Somit lautet die 3.BIFO (Binomische Formel)

$$(a-b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow MINUS!$$

genauso richtig:

$$(g-s)\cdot(g+s) = g^2 - s^2 \rightarrow MINUS!$$

Stelle dir die Angabe als folgende Darstellung vor:

$$\left(\underbrace{4f}_{Nummer1} - \underbrace{5t}_{Nummer2}\right)\cdot\left(\underbrace{4f}_{Nummer1} + \underbrace{5t}_{Nummer2}\right) =$$

$$(Nummer1)^2 = (4f)^2 = (4\cdot f)^2 = \Rightarrow \text{Produkt wird quadriert, indem jeder Faktor quadriert wird}$$
$$= 4^2 \cdot f^2 = 16f^2$$
$$(Nummer2)^2 = (5t)^2 = (5\cdot t)^2 = \Rightarrow \text{Produkt wird quadriert, indem jeder Faktor quadriert wird}$$
$$= 5^2 \cdot t^2 = 25t^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(Nummer1 - Nummer2)\cdot(Nummer1 + Nummer2) = (Nummer1)^2 - (Nummer2)^2 \\ MINUS \text{ zwischen den beiden Quadrattermen} \quad 3.Binomische Formel \quad (3.BIFO)\end{array}}$$

$$(4f-5t)(4f+5t)=(4f)^2-(5t)^2=4^2\cdot f^2-5^2\cdot t^2=16f^2-25t^2$$

$$(4f-5t)(4f+5t)=\boxed{16f^2-25t^2}$$

Wir wissen aus dem Übungsleuchtturm Nr.020 vom Multiplizieren zweier Binome: Zitat:

Tritt ein Produkt („mal“) zweier Klammern auf, dessen Binome in den Produktklammern sich nur durch ihr mittleres Rechen(Vor-)zeichen unterscheiden, so treten in der Mitte der Rechnung beim Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel 2 gemischte Glieder auf, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden- mit derselben Vorzahl und Variable -einmal mit Vorzeichen plus, einmal mit Minus. Diese beiden Glieder fallen stets weg (heben sich auf)!!!!

Solche Multiplikationen haben als Lösung (die nicht mehr weiter vereinfachbar ist) immer folgende Struktur **für eine Hochzahl 1:**

Quadratpotenz(-term)1 – (minus) **Quadratpotenz(-term)2**

Für eine Angabe mit **höheren Potenzen als 1!!**

Bei uns: **Quadratierter Potenzterm 1** –(minus) **Quadratierter Potenzterm 2**

Hochzahl größer als 2 Hochzahl größer als 2

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „ everyone with oneevery“. In unserem Beispiel hier wäre es die 3.BIFO

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$$\left(\overbrace{4f}^{1}-\overbrace{5t}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{4f}_{3}+\underbrace{5t}_{4}\right)=$$

$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$ oder $\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$

$$\left(\overbrace{4f}^{1}-\overbrace{5t}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{4f}_{3}+\underbrace{5t}_{4}\right)=\boxed{16f^{2}-25t^{2}}$$

Musterbeispiel Nr.006 zuÜ11

Berechne nach den Binomischen Formeln durch Einsetzen

$$\left(\frac{6}{17}c-\frac{5}{14}y\right)\left(\frac{6}{17}c+\frac{5}{14}y\right)=$$

oder

$$\left(\frac{6}{17}c+\frac{5}{14}y\right)\left(\frac{6}{17}c-\frac{5}{14}y\right)=$$ *(klar nach dem Vertauschungsgesetz)*

Alternativtext:

Berechne nach einer dir bekannten Formel ohne die Binome auszumultiplizieren!

Multipliziere als <u>Probe</u> die Angabe-die Binome- aus!

Wir merken, dass sich die Binome in den Produktklammern nur durch ihr Rechenzeichen unterscheiden.*“dasselbe einmal plus, einmal minus“*

Aufgrund dieser vorliegenden Angabe liegt die **3.Binomische Formel** vor.

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

$$\boxed{\begin{array}{l}(Nummer1-Nummer2)\cdot(Nummer1+Nummer2)=(Nummer1)^2-(Nummer2)^2\\ MINUS\ zwischen\ den\ beiden\ Quadrattermen\qquad 3.BinomischeFormel\quad (3.BIFO)\end{array}}$$

$$Nummer1 = \frac{6}{17}c = \frac{6}{17} \cdot c$$
$$Nummer2 = \frac{5}{14}y = \frac{5}{14} \cdot y$$

Somit lautet die 3.BIFO (Binomische Formel)

$$(a-b) \cdot (a+b) = (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow MINUS!$$

genauso richtig:

$$(g-s) \cdot (g+s) = g^2 - s^2 \rightarrow MINUS!$$

Stelle dir die Angabe als folgende Darstellung vor:

$$\left(\underbrace{\frac{6}{17}c}_{Nummer1} - \underbrace{\frac{5}{14}y}_{Nummer2} \right) \cdot \left(\underbrace{\frac{6}{17}c}_{Nummer1} + \underbrace{\frac{5}{14}y}_{Nummer2} \right) =$$

$$(Nummer1)^2 = \left(\frac{6}{17}\cdot c\right)^2 \Rightarrow \text{Produkt wird quadriert, indem jederFaktor quadriert wird}$$

$$\left(\frac{6}{17}\right)^2 \cdot c^2 \Rightarrow \text{Quotient (Bruch)wird potenziert = quadriert, indemZähler und Nenner}$$

$$\text{potenziert = quadriert werden} \rightarrow = \frac{6^2}{17^2}c^2 = \frac{36}{289}c^2$$

$$(Nummer2)^2 = \left(\frac{5}{14}\cdot y\right)^2 \Rightarrow \text{Produkt wird quadriert, indem jederFaktor quadriert wird}$$

$$\left(\frac{5}{14}\right)^2 \cdot y^2 \Rightarrow \text{Quotient(Bruch)wird potenziert = quadriert, indemZähler und Nenner}$$

$$\text{potenziert = quadriert werden} = \frac{5^2}{14^2}y^2 = \frac{25}{196}y^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(Nummer1 - Nummer2)\cdot(Nummer1 + Nummer2) = (Nummer1)^2 - (Nummer2)^2 \\ \text{MINUS zwischen den beiden Quadrattermen} \quad 3.\text{BinomischeFormel} \quad (3.\text{BIFO})\end{array}}$$

$$\left(\frac{6}{17}c - \frac{5}{14}y\right)\left(\frac{6}{17}c + \frac{5}{14}y\right) = \boxed{\frac{36}{289}c^2 - \frac{25}{196}y^2}$$

$$\left(\frac{6}{17}c - \frac{5}{14}y\right)\left(\frac{6}{17}c + \frac{5}{14}y\right) =$$

$$= \left(\frac{6}{17}\cdot c\right)^2 - \left(\frac{5}{14}\cdot y\right)^2 \Rightarrow \text{Produkt wird quadriert, indem jederFaktor quadriert wird}$$

$$\rightarrow \left(\frac{6}{17}\right)^2 \cdot c^2 - \left(\frac{5}{14}\right)^2 \cdot y^2 \Rightarrow \text{Quotient(Bruch)wird potenziert = quadriert, indem}$$

$$\text{Zähler und Nenner potenziert = quadriert werden}$$

$$= \frac{6^2}{17^2}c^2 - \frac{5^2}{14^2}y^2 = \frac{36}{289}c^2 - \frac{25}{196}y^2$$

Wir wissen aus dem Übungsleuchtturm Nr.020 vom Multiplizieren zweier Binome: Zitat:

Tritt ein Produkt („mal") zweier Klammern auf, dessen Binome in den Produktklammern sich nur durch ihr mittleres Rechen(Vor-)zeichen unterscheiden, so treten in der Mitte der Rechnung beim Ausmultiplizieren der Klammern nach der Regel 2 gemischte Glieder auf, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden- mit derselben Vorzahl und Variable -einmal mit Vorzeichen plus, einmal mit Minus. Diese beiden Glieder fallen stets weg (heben sich auf)!!!!

Solche Multiplikationen haben als Lösung (die nicht mehr weiter vereinfachbar ist) immer folgende Struktur **für eine Hochzahl 1:**

Quadratpotenz(-term)1 – (minus) **Quadratpotenz(-term)2**

Für eine Angabe mit **höheren Potenzen als 1!!**

Bei uns: **Quadratierter Potenzterm 1** –(minus) **Quadratierter Potenzterm 2**

Hochzahl größer als 2 Hochzahl größer als 2

Dieser Vorgang ist immer derselbe. Präge ihn dir gut ein, du wirst ihn als Probe für das Rechnen mit der Binomischen Formel brauchen (als 2.Rechenart neben dem Einsetzen in die Formel.) Die Formel ist wesentlich schneller als das Ausmultiplizieren „ everyone with oneevery". In unserem Beispiel hier wäre es die 3.BIFO

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$$\left(\overbrace{\frac{6}{17}c}^{1}-\overbrace{\frac{5}{14}y}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{6}{17}c}_{3}+\underbrace{\frac{5}{14}y}_{4}\right)=$$

$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$ oder $\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$

$$\left(\overbrace{\frac{6}{17}c}^{1}-\overbrace{\frac{5}{14}y}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{6}{17}c}_{3}+\underbrace{\frac{5}{14}y}_{4}\right)=\boxed{\frac{36}{289}c^2-\frac{25}{196}y^2}$$

Musterbeispiel Nr.007 zuÜ12

Zerlege= Berechne nach den Binomischen Formeln durch Einsetzen

$$\frac{196}{225}p^2 - \frac{1}{289}u^2 =$$

Multipliziere als <u>Probe</u> dein Ergebnis -die Binome- aus, um die Angabe wieder zu erhalten!

Alternativtext:

Berechne nach einer dir bekannten Formel

Wir merken, dass in den Gliedern der Differenz in Zähler und Nenner des Koeffizients

(Zahl vor der Quadratvariable) Quadratzahlen stehen.

Die Variablen sind quadriert-(also Quadratische Terme)-leicht zu erkennen. Das ist entscheidend

Aufgrund dieser vorliegenden Angabe liegt die **3.Binomische Formel** vor.

Es ist nur die Umkehrung der Formel aus Musterbeispiel Nr.006 und 007.

Das bedeutet: Zuvor haben wir die Formel von links nach rechts gelesen.

$$\boxed{\begin{array}{l} (Nummer1 - Nummer2)\cdot(Nummer1 + Nummer2) = (Nummer1)^2 - (Nummer2)^2 \\ MINUS\ zwischen\ den\ beiden\ Quadrattermen \qquad 3.Binomische Formel \quad (3.BIFO) \end{array}}$$

Wir bezeichnen das 1.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 1

Wir bezeichnen das 2.Glied in der Klammer mit (Glied) Nummer 2

Nun lesen wir unsere obige 3.BIFO von **rechts nach links:**

$$(Nummer1)^2-(Nummer2)^2=(Nummer1-Nummer2)\cdot(Nummer1+Nummer2)$$
$$MINUS\ zwischen\ den\ beiden\ Quadrattermen \qquad 3.BinomischeFormel \quad (3.BIFO)$$

Auch wenn in den beiden Gliedern keine Quadratzahlen vorkommen, können wir solche Produkte nach der

binomischen Formel zerlegen!!! Wir müssen dann eine Wurzel setzen. (siehe Bemerkung später)

$$(Nummer1)^2=\frac{196}{225}p^2$$
$$(Nummer2)^2=\frac{1}{289}u^2$$

Achtung!!!! Nun tritt im Unterschied zum vorigen Ü **der Term schon quadriert auf!!!!**

Das bedeutet, wir müssen die Nummer 1 und die Nummer 2 alleine erst herausfinden.

Wir müssen uns fragen, **welche Zahl multipliziert mit welcher Zahl (natürlich mit derselben Zahl) also aufgespalten die Nummer 1 quadriert bzw. Nummer 2 quadriertergibt**

$$\frac{196}{225}p^2 = \Omega ?\, p \bullet \Omega ?\, p$$

$\Omega ?$ steht für eine Zahl vor dem p, die quadriert $\frac{196}{225}$ ergibt.

Wir suchen die Wurzel aus diesem Bruch.

Klar ist, dass $p^2 = p \bullet p$ ist.

$$\Omega ? \bullet \Omega ? = 196$$

$$\Omega ? \bullet \Omega ? = 225$$

Da wir die Wurzelzahlen in der 4.Klasse erst kennenlernen, müssen wir noch probieren

$$11 \bullet 11 = 121, 12 \cdot 12 = 144, ... \rightarrow 14 \cdot 14 = 196!!!! \quad 15 \cdot 15 = 225!!!!$$

$$\frac{1}{289}u^2 = \Omega ?\, u \bullet \Omega ?\, u$$

$$11 \bullet 11 = 121, 12 \cdot 12 = 144, ... \rightarrow 14 \cdot 14 = 196!!!! \quad 15 \cdot 15 = 225!!!! \rightarrow 17 \cdot 17 = 289$$

Wir erhalten

$$\boxed{\frac{196}{225}p^2 - \frac{1}{289}u^2 = \left(\frac{14}{15}p - \frac{1}{17}u\right) \cdot \left(\frac{14}{15}p + \frac{1}{17}u\right)}$$

Probe durch Ausmultiplizieren der beiden Binome

$$\left(\overbrace{\frac{14}{15}p}^{1}-\overbrace{\frac{1}{17}u}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{14}{15}p}_{3}+\underbrace{\frac{1}{17}u}_{4}\right)=$$

$\boxed{1\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 3+2\bullet 4}$ oder $\boxed{1\bullet 3+2\bullet 3+1\bullet 4+2\bullet 4}$

$$\left(\overbrace{\frac{14}{15}p}^{1}-\overbrace{\frac{1}{17}u}^{2}\right)\cdot\left(\underbrace{\frac{14}{15}p}_{3}+\underbrace{\frac{1}{17}u}_{4}\right)=\boxed{\frac{196}{225}p^2-\frac{1}{289}u^2=\left(\frac{14}{15}p-\frac{1}{17}u\right)\cdot\left(\frac{14}{15}p+\frac{1}{17}u\right)}$$

Bemerkung 1:

Steht in $a^2 - b^2$ statt Minus ein Plus in der Mitte,dann gibt es keine Binomische Formel!!!

zum Beispiel $\frac{196}{225}p^2 + \frac{1}{289}u^2 =$

$a^2 + b^2 -> \textit{für uns nicht berechenbar} = \textit{zerlegbar}!!!$

Der Term ist schon zerlegbar, ähnlich wie mit Minus $a^2 - b^2$, aufspaltbar, **nur ist dies erst später (7.Klasse) im Zuge der Einführung sogenannter komplexer Zahlen für uns möglich.**

Bemerkung 2:

Auch wenn in den beiden Gliedern von

$a^2 - b^2$

keine Quadratzahlen vorkommen, können wir solche Produkte nach der binomischen

Formel zerlegen!!! Wir müssen dann eine Wurzel setzen.

Bsp 1: $77p^2 - 23u^2 = \left(\sqrt{77}p - \sqrt{23}u\right) \cdot \left(\sqrt{77}p + \sqrt{23}u\right)$

77 und 23 sind keine Quadratzahlen

aber:

$$16p^2 - 81u^2 = (4p - 9u)\cdot(4p + 9u)$$

16 und 81 sind Quadratzahlen !!!!!

Bsp 2 : $\frac{176}{223}p^2 - \frac{1}{249}u^2 = \left(\sqrt{\frac{176}{223}}p - \sqrt{\frac{1}{249}}u\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{176}{223}}p + \sqrt{\frac{1}{249}}u\right)$

176 ,223 und 249 sind keine Quadratzahlen

Theorie:

Merkregel für Binomische Formeln:

-> Siehe auch vorige Musterbeispiele !!!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \text{ HIER MINUS VORNE!!}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 + b^2 -> \text{für uns nicht berechenbar = zerlegbar!!!}$$

a............1.Glied b.......2.Glied

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm 023

=Übungskapitel

Herausheben gemeinsamer Faktoren Teil 1

Grundbegriffe

Merkregel für das Herausheben:

-> Siehe auch Musterbeispiele

Strukturmerkformel des Heraushebens:

$$\text{Gemeinsame Faktoren} - \text{in allen Gliedern vorkommend} \bullet \begin{pmatrix} \text{Übriggebliebene NICHT färbig unterstrichene} \\ \text{/ hier NICHT mit Unterklammer notierte Glieder} \\ \text{mit } +,- \quad \text{also in Summe oder Differenz} \end{pmatrix}$$
$$\uparrow\Uparrow\uparrow \text{ EINMAL VOR die ( ) geschrieben} - \text{färbig unterstrichen / hier mit geschwungener Unterklammer}$$
$$\text{notiert} - \text{in allen Gliedern (Zahlen und / oder Variable)} -> \text{EINMAL VOR die ( ) geschrieben}$$

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“, das übrige bleibt in der Klammer“

*Herausheben ist die **Umkehr des Distributivgesetzes**:*

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad \text{Distributivgesetz} \Updownarrow\Leftrightarrow$$
$$a\cdot c + b\cdot c = (a+b)\cdot c \quad \text{Herausheben} \Updownarrow$$

In der 1.Klasse haben wir bereits das Herausheben im Zuge des Verteilungsgesetzes kennengelernt:

Herausheben **eines gemeinsamen Faktors**

Herausheben ist die Umkehr des Distributivgesetzes

Bsp: $67 \cdot (\ 1300 + 87\ ) = 67 \cdot 1300 + 67 \cdot 87 =$ **DG**

$= 67 \cdot 1300 + 67 \cdot 87 = 67 \cdot (\ 1300 + 87\ )$ **Herausheben**

67 wurde herausgehoben, weil 67 in beiden Produkten zwischen dem + gemeinsam vorkommt!!!

Merksatz: „das was gemeinsam ist, wird ***einmal*** vor die Klammer multiplizierend angeschrieben. Der Rest bleibt/kommt in der/die Klammer“

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$

einfach das Verteilungsgesetz von rechts nach links gelesen…..

Wichtig: Kurz zum Merken:

Mache die Probe, indem du das Verteilungsgesetz (Das vor der Klammer stehende Glied mit **jedem einzelnen Glied** in der Klammer aus-multiplizieren) anwendest!!

Vergiss nicht: wird „alles herausgehoben " aus einem Glied, so bleibt **1 und nicht 0** in der Klammer über!!!

Bsp.: $4x^3 + 8x^4 = 4x^3 \cdot (1 + 2x)$

wird der Einser nicht dazugeschrieben, **so ist es falsch**!!!

Mache die Probe, indem du das Verteilungsgesetz anwendest –dann hast du den Beweis

Unterscheide:

Ü $39u+21v=3\cdot(13u+7v)\rightarrow nur\ eine\ Zahl\ wird\ herausgehoben$

$39u^2+21v^2=3\cdot(13u^2+7v^2)\rightarrow nur\ eine\ Zahl\ wird\ herausgehoben$

Ü $39uv+21v=3v\cdot(13u+7)\rightarrow Zahl\ und\ Variable\ wird\ herausgehoben$

$39u^2v+21v^2=3v\cdot(13u^2+7v)\rightarrow Zahl\ und\ Variable\ wird\ herausgehoben$

$39u^4v^3+21v^2=3v^2\cdot(13u^4v+7)\rightarrow Zahl\ und\ Variable(Potenz)\ wird\ herausgehoben$

Ü $8uv+9v=v\cdot(8u+9)\rightarrow nur\ eine\ Variable\ wird\ herausgehoben$

$8uv^2+9v^3=v^2\cdot(8u+9v)\rightarrow nur\ eine\ Variable(Potenz)\ wird\ herausgehoben$

$8uv^2+9v^2=v^2\cdot(8u+9)\rightarrow nur\ eine\ Variable(Potenz)\ wird\ herausgehoben$

Überall wurde korrekt herausgehoben, weil soweit als möglich herausgehoben wurde!!!

Wozu herausheben????

Herausheben ist oft sehr notwendig und praktisch-etwa in **Bruchtermen**, um dann besser kürzen zu können.

Aber auch in der Oberstufe dient es zur Erleichterung von Rechengängen-etwa in der Differentialrechnung (7.Klasse),um Ansatzfunktionen zu vereinfachen.

Musterbeispiele

Musterbeispiel Nr.001 zu Ü1-2

Arbeitsauftrag

Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$24b+18m=$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern (Summanden) **->** vorkommen.

Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal" , das übrige bleibt in der Klammer"

Zu Beginn kannst du die Glieder in Faktoren (…mal…mal) noch zerlegen, damit du dir leichter tust, um zu sehen, welche Zahlen oder/und Variable gemeinsam vorkommen

$24b+18m=6\cdot4\cdot b+6\cdot3\cdot b$

noch genauer-im Sinne der Primfaktorenzerlegung

$$24b + 18m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot b + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b$$

Wir sehen: Nur der 6-er (2-mal 3 im Sinne von obiger Überlegung) ist in **beiden Gliedern gemeinsam** enthalten, die Variable nicht, da im 1.Glied nur b vorkommt, im 2.Glied nur m!!!

Wir schreiben daher den **6-er einmal multipliziert vor die Klammer**

Herausheben eines gemeinsamen Faktors: hier in unserem Beispiel:

„das was gemeinsam ist,(in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten): 6 wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige $(4 \cdot b + 3 \cdot m)$ bleibt in der Klammer“

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{24b + 18m = 6 \cdot 4 \cdot b + 6 \cdot 3 \cdot b = 6 \bullet (4 \cdot b + 3 \cdot m)}$$

Mehr kann nicht mehr herausgehoben werden.

In der Angabe steht:

Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus

$$24b + 18m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot b + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b = 2 \cdot (3 \cdot 4b + 3 \cdot 3m) = 2 \cdot (12 + 9m)$$

Wir haben zwar auch das Gemeinsame **((nur)etwas Gemeinsames)** herausgehoben, aber nicht **soweit als möglich**

Die Rechnung ist noch nicht im Sinne des Heraushebens korrekt, also nicht fertig!!!!

Schließlich kommt ja in der Klammer noch der 3er in beiden Gliedern gemeinsam vor.

$$24b + 18m = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot b + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b = 3 \cdot (2 \cdot 4b + 2 \cdot 3m) = 3 \cdot (8b + 6m)$$

Auch hier haben wir zwar das Gemeinsame **((nur)etwas Gemeinsames)** herausgehoben, aber nicht **soweit als möglich**

Die Rechnung ist noch nicht im Sinne des Heraushebens korrekt, also nicht fertig!!!!

Schließlich kommt ja in der Klammer noch der 2er in beiden Gliedern gemeinsam vor.

Ein kleiner Tip:

Zeichne dir ruhig einen Kran auf und hänge an seinen Haken das Gemeinsame der Glieder, das vor der Klammer steht. Ich habe dies auch in der Stunde in einer Übergangsklasse an die Tafel gezeichnet.

Musterbeispiel Nr.002 **zu Ü1-2.2**

Arbeitsauftrag

Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$3i + 6f + 31s - 18k =$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in **allen 4 Gliedern** (Summanden) vorkommen.

Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige bleibt in der Klammer“

Zahlen

Es kommt zwar der 3er im 1., 2. und 4.Glied gemeinsam vor, jedoch **nicht im 3.Glied** 31.

Daher können wir ihn **nicht herausheben**, er muss **in allen Gliedern gemeinsam vorkommen!!!!**

Variable

kommt überhaupt keine gemeinsam vor. Diese können wir daher sowieso nicht herausheben.

Wir schreiben also:

Es kann nicht herausgehoben werden. **Nicht möglich.**

siehe auch Beispiel 1 und 2 der Angabe am header!

Musterbeispiel Nr.003 **zu Ü1-1.1**

Arbeitsauftrag

Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$78567w - 78567$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern (Summanden) vorkommen.

Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige bleibt in der Klammer“

78567 kommt in beiden Gliedern vor. Wir heben es heraus.

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{78567w - 78567 = 78567 \bullet (w-1)}$$

Achtung!!!! Tritt nur **eine Zahl alleine** in einem Glied auf und ist diese **vollständig heraushebbar, dann müssen wir unbedingt 1 in die Klammer an ihrer Stelle setzen!!!!**

Denn $78567 \bullet 1 = 78567$ wenn wir die Probe machen durch Ausmultiplizieren im Sinne des Verteilungsgesetzes.

$$\boxed{Zahl \bullet 1 = Zahl}$$

Falsch ist: (leider wurde dieser Fehler häufig bei den SchülerInnen gemacht)

$\boxed{78567w - 78567 = 78567 \bullet (w-0)}$ **falsch**

$\boxed{78567w - 78567 = 78567 \bullet (w)}$ **falsch**

Bist du dir unsicher, mache stets die Pobe nach dem Verteilungsgestz!

Musterbeispiel Nr.004 **zu Ü1 - 13**

Arbeitsauftrag

Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$$27x^5 - 18x^8 =$$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern **in Potenz auftretend gemeinsam** vorkommen

Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal“ , das übrige bleibt in der Klammer“

Zahlen

Schnellchecker:

Ohne dass wir eine Primfaktorenzerlegung durchführen, sehen wir, dass der 9er (3 mal 3)in beiden Gliedern vorkommt. Im 1.Glied bleiben uns ein 3-er, im 2. Glied ein 2-er übrig

Zahlen und Variable- genaue Untersuchung:

Bei höheren Zahlen und Potenzen ist eine genaue Zerlegung der Faktoren in den beiden (oder mehreren) Gliedern vorteilhaft und gut:

$$27x^5 - 18x^8 = = 3\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x - 2\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$$

Wir unterstreichen oder markieren die gemeinsamen Faktoren (sowohl Zahlen als auch Variable) färbig (hier haben wir sie mit einer geschwungenen Unterklammer und der Bemerkung „gemeinsam“ notiert)

$$27x^5 - 18x^8 = 3\cdot \underbrace{3\cdot 3}_{gemeinsame\ Zahlen} \cdot \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}_{gemeinsame\ Variable} - 2\cdot \underbrace{3\cdot 3}_{gemeinsame\ Zahlen} \cdot \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}_{gemeinsame\ Variable} \cdot x\cdot x\cdot x$$

Um später die Potenz nicht in einzelne Faktoren (mal…mal…) zerlegen zu müssen,

wenn du den gemeinsamen Faktor zum Herausheben (in Potenz) bestimmst-

etwa $x\cdot x\cdot x = x^3$

„misst“ du/ schaust du, wie oft eine Potenz in einer anderen enthalten ist

„wie viel mal Basis hoch …. ist gleich selbe Basis hoch ….“-> *siehe Merkkasten auf der nächsten Seite!*

1.)Vor die Klammer mit Multiplikationszeichen wird geschrieben:

Diese Faktoren sind oben in der Zerlegung in den Gliedern mit Unterklammer markiert –(Zahl oder/und Variable) (du arbeitest statt der Unterklammer mit Unterstreichen in Farbe…)

Zahl:

$\underbrace{3\cdot 3}_{gemeinsame\ Zahlen}$ wird herausgehoben

Variable

In beiden Gliedern gemeinsam kommt $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{gemeinsame\ Variable} = x^5$ vor.

Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Daher wird $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{gemeinsame\ Variable} = x^5$ herausgehoben (vor die Klammer multipliziert geschrieben)

2.) In die Klammer kommen:

Diese Faktoren bleiben oben in der Zerlegung in den Gliedern nicht markiert ohne Unterklammer stehen du arbeitest mit Unterstreichen in Farbe..)

Zahl:

1.Glied

Zahl 3 Diese müssen **wir in die Klammer** schreiben.

2.Glied

Zahl 2

Variable:

2.Glied

$x \cdot x \cdot x = x^3$ Diese müssen wir in die Klammer schreiben.

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{27x^5 - 18x^8 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (3 - 2 \cdot x \cdot x \cdot x\ )}$$

$$\boxed{27x^5 - 18x^8 = 9x^5 \cdot (3 - 2x^3)}$$

Merke:

„Misst“ du/ schaust du, wie oft eine Potenz in einer anderen enthalten ist,

„wie viel mal Basis hoch …. ist gleich selbe Basis hoch ….“

wie oft mal Basis x hoch a ist gleich selbe Basis x hoch b

also z.B. $x^4 \bullet ? = x^6$ (siehe unten genauer) -stellst du folgende Überlegungen an:

Beispiel:

Hebe soweit als möglich heraus:

$x^6 - x^8 =$

Die niedrigere Potenz ist auf jeden Fall in der höheren logischerweise enthalten.

Wenn du dann wissen willst, was im anderen Glied mit der höheren Potenz in der Angabe in der Klammer stehen bleibt, merke dir: Du **subtrahierst** (minus rechnen) die **niedrigere von der höheren.**

Hier: 8-6=2

Daher bleibt im 2.Glied in der Klammer x^2 übrig.

$$x^6 - x^8 = x^6 \cdot \left(1 - x^2\right)$$

Ganz genau mathematisch überlegst du dir im Geiste (und dann bei der Probe oder auch gleich):

$$x^6 \bullet ? = x^8$$

$x^6 \bullet x^2 = x^8$

weil die Hochzahlen bei der Multiplikation von Potenzen ***gleicher Basis*** **addiert** werden:

$x^{6+2} = x^8$

In unserem Ü4:

$x^5 \bullet ? x^8$ 8-5=3

$x^5 \bullet x^3 = x^8$

weil $x^{5+3} = x^8$

Musterbeispiel Nr.005 zu Ü1 - 22

Arbeitsauftrag

Hebe soweit als möglich den gemeinsamen Faktor heraus.....☹ wenn möglich....

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in allen Gliedern gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$r^3s^2 - r^2s =$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den beiden Gliedern **in Potenz auftretend gemeinsam** vorkommen.

Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in beiden/allen Gliedern zwischen minus und plus enthalten), wird 1mal vor die Klammer gesetzt mit „mal", das übrige bleibt in der Klammer"

Zahlen

kommen keine vor.

Variable

Es kommen nun 2 Variable vor. Wir müssen also r und s und deren Potenz (Hochzahl) (getrennt) betrachten.

Zahlen und Variable- genaue Untersuchung:

Bei höheren Zahlen und vor allem Potenzen ist (zu Beginn) eine genaue Zerlegung der Faktoren in den beiden (oder mehreren) Gliedern vorteilhaft und gut. Später wirst du die Zerlegung mit Übung nicht mehr brauchen.

$$r^3s^2 - r^2s = = r \cdot r \cdot r \cdot s \cdot s - r \cdot r \cdot s$$

Wir unterstreichen oder markieren die gemeinsamen Faktoren (sowohl Zahlen als auch Variable) färbig (hier haben wir sie mit einer geschwungenen Unterklammer und der Bemerkung „gemeinsam" notiert)

$$r^3s^2 - r^2s = \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot r \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam} \cdot s - \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam}$$

$$r^3s^2 - r^2s = \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot r \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam} \cdot s - \underbrace{r \cdot r}_{gemeinsam} \cdot \underbrace{s}_{gemeinsam}$$

1.)Vor die Klammer mit Multiplikationszeichen wird geschrieben:

Diese Faktoren sind oben in der Zerlegung in den Gliedern mit Unterklammer markiert –(Zahl oder/und Variable) : (du arbeitest statt der Unterklammer mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl:

Variable

Jetzt liegen 2 verschiedene Variable vor.

Variable r :

In beiden Gliedern gemeinsam kommt $r \cdot r = r^2$ vor. Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Variable s :

In beiden Gliedern gemeinsam kommt nur s vor. Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Daher wird $r \cdot r \cdot s$ herausgehoben (vor die Klammer multipliziert geschrieben)

2.) In die Klammer kommen:

Diese Faktoren bleiben oben in der Zerlegung in den Gliedern nicht markiert ohne Unterklammer stehen : (du arbeitest mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl: **kommt keine vor**

Variable:

1.Glied

Im 1.Glied bleibt uns dann in der **Klammer** nur $r \cdot s$ übrig.

2.Glied

Im 2.Glied bleiben uns kein r oder s übrig! Wir müssen 1 in die **Klammer** schreiben.

Siehe Musterbeispiel Nr.003:

Achtung!!!! Tritt nur eine Zahl alleine in einem Glied auf und ist diese **vollständig heraushebbar, dann müssen wir unbedingt 1 in die Klammer an ihrer Stelle setzen!!!**

$$r^3s^2 - r^2s = r \cdot r \cdot s \bullet (r \cdot s - 1)$$

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{r^3s^2 - r^2s = r^2 \cdot s \bullet (r \cdot s - 1)}$$

Musterbeispiel Nr.006 zu Ü1 - 25

Arbeitsauftrag

Hebe <u>soweit als möglich</u> den gemeinsamen Faktor heraus…..☹ wenn möglich….

Achtung!!! Wir heben nur dann heraus, wenn ein gemeinsamer Faktor (als Zahl, Variable oder Potenz) in <u>allen Gliedern</u> gemeinsam vorkommt!!!! Nur dann ist es für uns mathematisch korrekt!!!

$$44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 =$$

Wir schauen, welche **Zahlen oder /und Variable gemeinsam** in den 3 Gliedern **in Potenz auftretend gemeinsam** vorkommen.

Dieses Gemeinsame -> Zahlen oder /und Variable- schreiben wir dann (nur) 1- mal multipliziert vor die Klammer.

Wir können folgende Merkregel aufstellen:

Herausheben eines gemeinsamen Faktors:

„das was gemeinsam ist, (in <u>beiden/allen</u> Gliedern zwischen minus und plus enthalten), <u>wird 1mal</u> vor die Klammer gesetzt mit „mal“, das übrige bleibt in der Klammer“

Zahlen

Nach der Primfaktorenzerlegung (siehe Übungschili Nr.004 und Wissenschili der 2.Klasse)

Natürlich kannst du auch in TI nspire mit dem factor-Befehl arbeiten!!

$44 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \qquad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Variable

Es kommen nun 2 Variable vor. Wir müssen also g und k und deren Potenz (Hochzahl) (getrennt) betrachten.

Zahlen und Variable- genaue Untersuchung:

Bei höheren Zahlen und vor allem Potenzen ist (zu Beginn) eine genaue Zerlegung der Faktoren in den beiden (oder mehreren) Gliedern vorteilhaft und gut. Später wirst du die Zerlegung mit Übung nicht mehr brauchen.

$$44g^8+24g^6k-96g^4k^2=2\cdot2\cdot11\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g+2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot k-$$
$$-2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g\cdot k\cdot k$$

Wir unterstreichen oder markieren die gemeinsamen Faktoren (sowohl Zahlen als auch Variable) färbig (hier haben wir sie mit einer geschwungenen Unterklammer und der Bemerkung „gemeinsam“ notiert)

$$44g^8+24g^6k-96g^4k^2=$$
$$=\underbrace{2\cdot2}_{gemeinsame\ Zahlen}\cdot11\cdot\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdot g}_{gemeinsame\ Variable}\cdot g\cdot g\cdot g\cdot g+$$
$$+\underbrace{2\cdot2}_{gemeinsame\ Zahlen}\;2\cdot3\cdot\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdot g}_{gemeinsame\ Variable}\cdot g\cdot g\cdot k-$$
$$-\underbrace{2\cdot2}_{gemeinsame\ Zahlen}\;2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot\underbrace{g\cdot g\cdot g\cdot g}_{gemeinsame\ Variable}\cdot k\cdot k$$

1.)Vor die Klammer mit Multiplikationszeichen wird geschrieben:

Diese Faktoren sind oben in der Zerlegung in den Gliedern mit Unterklammer markiert –(Zahl oder/und Variable) : (du arbeitest statt der Unterklammer mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl: $\underbrace{2 \cdot 2}_{gemeinsame\ Zahlen}$

Variable

Jetzt liegen 2 verschiedene Variable vor.

Variable g :

In allen 3 Gliedern gemeinsam kommt $\underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot g}_{gemeinsame\ Variable}$ vor. Nicht mehr, keine höhere Potenz!

Variable k :

k kommt nur im 2.und 3.Glied gemeinsam vor, kann daher nicht herausgehoben werden.

2.) In die Klammer kommen:

Diese Faktoren bleiben oben in der Zerlegung in den Gliedern nicht markiert ohne Unterklammer stehen: (du arbeitest mit Unterstreichen in Farbe...)

Zahl:

1.Glied : 11

2.Glied $2 \cdot 3$

3.Glied $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Variable:

1.Glied

Im 1.Glied bleibt uns dann in der **Klammer** $g \cdot g \cdot g \cdot g$ übrig.

2.Glied

Im 2.Glied bleibt uns $g \cdot g \cdot k$ übrig! Wir müssen $g \cdot g \cdot k$ in die **Klammer** schreiben.

3.Glied

Im 3.Glied bleibt uns $k \cdot k$ übrig! Wir müssen $k \cdot k$ in die **Klammer** schreiben.

$$44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 = 2 \cdot 2 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \bullet (11 \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g + 2 \cdot 3 \cdot g \cdot g \cdot k - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k \cdot k)$$

Ergebnis des korrekten Heraushebens:

$$\boxed{44g^8 + 24g^6k - 96g^4k^2 = 4g^4 \bullet (11g^4 + 6g^2k - 24k^2)}$$

Musterbeispiel Nr.007 **zu Ü1 – 36**

Hebe (-1) heraus:

$$14v^2 - 6v - 10v^3 =$$

Heben wir (-1) heraus, **ändern wir einfach alle Vorzeichen** (auch das erste vor dem 1.Glied nicht vergessen!!!!) und schreiben die mit Vorzeichen geänderte Angabe in die Klammer.

Fix herausgehoben vor der Klammer ist immer (-1)

$$\boxed{14v^2 - 6v - 10v^3 = (-1) \bullet (-14v^2 + 6v + 10v^3)}$$

Überlege als Probe:

Multiplizierst du (-1) mit allen Gliedern aus, ändern sich (wieder) alle Vorzeichen.

Minus mal Minus ergibt Plus.

Plus mal Minus ergibt Minus.

Mathe Leuchtturm

Wissensleuchtturm

= Wissenskapitel

zu

Mathe Leuchtturm

Übungsleuchtturm 024

=Übungskapitel

Herausheben gemeinsamer Faktoren

Teil 2

Herausheben um zu kürzen-

<u>Bruchterme</u>-in Zusammenhang mit der binomischen Formel

Gehe beim Anwenden der Binomischen Formel auf **2 verschiedene Arten** vor. Dies bedeutet:

1.) spalte einmal gleich den Term im Zähler und/oder Nenner nach der binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ auf (ohne ganz zu Beginn herauszuheben) und **hebe** *dann erst* aus den beiden Klammern **heraus**-wenn möglich. Aus dem Ausdruck im Zähler/Nenner,in dem du **keine Binomischen Formel** anwenden kannst, ***hebst du „normal-wie immer“ heraus.***

2.) als **Probe: hebe** gleich ***am Beginn*** zuerst **heraus** (wenn möglich) und spalte ***dann erst*** den Term im Zähler oder Nenner ***nach der Binomischen Formel*** $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ auf

Aus dem Ausdruck im Zähler/Nenner, in dem du **keine Binomischen Formel** anwenden kannst, **hebst** du „***normal-wie immer***“ **heraus.**

Typ 2:

Falls die Binomische Formel $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ **nicht primär** (sinnvoll mit ganzzahligen Wurzeln) **anwendbar** ist:

weder im Zähler noch im Nenner des Bruchterms

1.) kürze durch **Herausheben gemeinsamer Faktoren in Zähler und Nenner**

2.) als Probe = Kontrolle:

entweder

A) kürze im sogenannten V (siehe Erklärung unten)

wenn im Bruchterm (+ oder - ->in Summe oder Differenz) im **Zähler „oben“ 2 Glieder und ein Glied im Nenner „unten“** vorkommen

B) **oder** *sinnerfassendes Kürzen*: jene Zahlen oder Variable die sowohl im Zähler als auch im Nenner in **allen** Gliedern vorkommen/enthalten sind

„das was überall enthalten ist- beim Betrachten erkennend

Diese Art von Kürzen A) und B) musst du immer in einer Summe oder Differenz anwenden!!!

Musterbeispiel Nr.001:

Kürze den folgenden Bruchterm durch Herausheben gemeinsamer Faktoren soweit als möglich.

Wende, wo es möglich ist, die Binomische Formel an und zerlege nach dieser den Zähler und/oder Nenner (in Linearfaktoren) um dann zu kürzen.

$\frac{7g^4h+21g^3h^2}{4h^4+16g^2h}$ $\quad$ $als\ Term: T(g,h)=\frac{7g^4h+21g^3h^2}{4h^4+16g^2h}$ *Term in 2 Variablen g und h*

Zum Begriff des Terms: Wiederholung:
-> siehe Übungsleuchtturm der 3.Klasse Nr.011- Terme-Teil1!

Es liegt **Typ 2** vor:

Die Binomische Formel $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ ist nicht (sinnvoll mit ganzzahligen Wurzeln) anwendbar-weder im Zähler noch im Nenner des Bruchterms

Ein Plus in der Mitte des oberen und auch unteren Terms ist der Indikator (das Zeichen) dass die Binomische Formel $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ **nicht anwendbar** ist

1.) kürze durch Herausheben gemeinsamer Faktoren in Zähler und Nenner

2.) als Probe= Kontrolle::

entweder

A) kürze im sogenannten V (siehe Erklärung unten)

wenn im Bruchterm (+ oder - ->in Summe oder Differenz) im Zähler „oben“ 2 Glieder

und ein Glied im Nenner „unten“ vorkommen

B) **oder** *sinnerfassendes Kürzen*: jene Zahlen oder Variable die sowohl im Zähler als auch im Nenner in **allen** Gliedern vorkommen/enthalten sind

„das was überall enthalten ist- beim Betrachten erkennend"

Als letzter Schritt wird erst herausgehoben.

1.)

$$\frac{7g^4h+21g^3h^2}{4h^4+16g^2h} = \rightarrow Herausheben \rightarrow \frac{7g^3h\cdot(g+3h)}{4h\cdot(h^3+4g^2)} = \rightarrow k\ddot{u}rzen\ von\ h \rightarrow \frac{7g^3\cdot(g+3h)}{4\cdot(h^3+4g^2)}$$

2.) als Probe = Kontrolle:

entweder

A) kürze im sogenannten V (siehe Erklärung unten)

wenn im Bruchterm (+ oder - ->in Summe oder Differenz) im Zähler „oben“ 2 Glieder

und ein Glied im Nenner „unten“ vorkommen

Da die Terme oben und unten aus je 2 Gliedern bestehen, also 4, ist das Kürzen im **sogenannten V nicht möglich.**

B) **oder** *sinnerfassendes Kürzen*: jene Zahlen oder Variable die sowohl im Zähler als auch

im Nenner in **allen** Gliedern vorkommen/enthalten sind

„das was überall enthalten ist- beim Betrachten erkennend“

hier sinnerfassend!

Wir sehen, dass h in jedem Glied in Zähler und Nenner vorkommt. In allen 4 Gliedern!!!

Wir streichen daher das h in allen 4 Gliedern

$$\frac{7g^4h+21g^3h^2}{4h^4+16g^2h} = \rightarrow kürzen \rightarrow \frac{7g^4+21g^3h}{4h^3+16g^2}$$

Nun heben wir erst heraus. Fürs Kürzen ist es nicht mehr zielführend.

$$\boxed{=\frac{7g^3\cdot(g+3h)}{4\cdot(h^3+4g^2)}}$$

Damit haben wir dasselbe Ergebnis wie oben erhalten

Zusatz Nr.001:

So führst du dann gleich die allgemeine Probe durch:

(diese Probe hat mit der anderen Methode 2.) (Probe=Kontrolle) in den beiden Typen- siehe Bemerkung vorhin- nichts zu tun!)

Zusatz zum Angabetext des Musterbeispiels Nr.001:
Führe die Probe für die Richtigkeit deines Heraushebens und Kürzens für $g=h=1$ durch!

$$Anfangsterm \quad T_A = \frac{7g^4h+21g^3h^2}{4h^4+16g^2h} \ldots\ldots\ldots \rightarrow Angabe$$

$$Endterm \quad T_E = \frac{7g^3\cdot(g+3h)}{4\cdot(h^3+4g^2)} \ldots\ldots \rightarrow vereinfachtes \quad Ergebnis$$

zu zeigen ist:

$$\frac{7g^4h+21g^3h^2}{4h^4+16g^2h} = \frac{7g^3\cdot(g+3h)}{4\cdot(h^3+4g^2)}$$ also

$\boxed{\rightarrow T_A = T_E}$

$$T_A = T(g=h=1) = \frac{7\cdot1^4\cdot1+21\cdot1^3\cdot1^2}{4\cdot1^4+16\cdot1^2\cdot1} = \frac{7\cdot1\cdot1+21\cdot1\cdot1}{4\cdot1+16\cdot1\cdot1} = \frac{7+21}{4+16} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$$

$$T_E = T(g=h=1) = \frac{7\cdot1^3\cdot(1+3\cdot1)}{4\cdot(1^3+4\cdot1^2)} = \frac{7\cdot1\cdot(1+3)}{4\cdot(1+4\cdot1)} = \frac{7\cdot4}{4\cdot5} = \Rightarrow gekürzt = \frac{7}{5}$$

$\boxed{\rightarrow T_A = T_E}$

Dies bedeutet, der Anfangsterm ist gleich dem Endterm.

Das haben wir durch die Belegung des Terms mit der Variablen $g = h = 1$ gezeigt

Dies gilt natürlich für das Einsetzen (Belegung) mit jeder beliebig gewählten Zahl aus der Zahlenmenge der reellen (rationalen) Zahlen.

-> siehe auch Übungsleuchtturm der 3.Klasse Nr.011- Terme-Teil1!

Musterbeispiel Nr.001 als exakte Termschreibweise:

$$als\ Term: T(g,h) = \frac{7g^4h + 21g^3h^2}{4h^4 + 16g^2h}$$

Mathematischer Term in den 2 Variablen *g und h*

Musterbeispiel Nr.002:

Kürze den folgenden Bruchterm durch Herausheben gemeinsamer Faktoren soweit als möglich.

Wende, wo es möglich ist, die Binomische Formel an und zerlege nach dieser den Zähler und/oder Nenner (in Linearfaktoren) um dann zu kürzen

$\frac{33x^5-18x^2}{9x^3}$ $\rightarrow als\ Term: T(x)=\frac{33x^5-18x^2}{9x^3}$ *Term in einer Variablen x*

Es liegt **Typ 2** vor:

Die Binomische Formel $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ ist nicht (sinnvoll mit ganzzahligen Wurzeln) **primär** anwendbar-(wegen x^5 im 1.Glied des Zählers!!) -weder im Zähler noch im Nenner des Bruchterms

1.) kürze durch Herausheben gemeinsamer Faktoren in Zähler und Nenner

2.) als Probe =Kontrolle:

entweder

A) kürze im sogenannten V (siehe Erklärung unten)

wenn im Bruchterm (+ oder - ->in Summe oder Differenz) im Zähler „oben" 2 Glieder

und ein Glied im Nenner „unten" vorkommen

B) **oder** *<u>sinnerfassendes Kürzen</u>*: jene Zahlen oder Variable die sowohl im Zähler als auch

im Nenner in **allen** Gliedern vorkommen/enthalten sind

„das was überall enthalten ist- beim Betrachten erkennend"

Als letzter Schritt wird erst herausgehoben.

1.) $\frac{33x^5 - 18x^2}{9x^3} =$

Wir können aus dem Term des Zählers x^2 herausheben. Wiederholen wir kurz, warum:

Im vorigen Übungsleuchtturm Nr.023- Musterbeispiel Nr.004 Seite 15 haben wir erfahren:

Merke:

„Misst“ du/ schaust du, wie oft eine Potenz in einer anderen enthalten ist,

„wie viel mal Basis hoch …. ist gleich selbe Basis hoch ….“

wie oft mal Basis x hoch a ist gleich selbe Basis x hoch b

also z.B. $x^4 \bullet ? = x^6$ (siehe unten genauer) -stellst du folgende Überlegungen an:

Beispiel:

Hebe soweit als möglich heraus:

$x^6 - x^8 =$

Die niedrigere Potenz ist auf jeden Fall in der höheren logischerweise enthalten.

Wenn du dann wissen willst, was im anderen Glied mit der höheren Potenz in der Angabe in der Klammer stehen bleibt, merke dir: Du **subtrahierst** (minus rechnen) die **niedrigere von der höheren.**

Hier: 8-6=2

Daher bleibt im 2.Glied in der Klammer x^2 übrig.

$$x^6 - x^8 = x^6 \cdot \left(1 - x^2\right)$$

$$\rightarrow Herausheben \rightarrow \frac{3x^2 \cdot \left(11x^3 - 6\right)}{9x^3}$$

Nun müssen wir eine Potenz kürzen. $x^2 gegen \leftrightarrow x^3$

Willst du noch ungeübter die Potenzen zerlegen, um leichter zu kürzen:

$$= \frac{3 \cdot x \cdot x \cdot \left(11 \cdot x \cdot x \cdot x - 6\right)}{9 \cdot x \cdot x \cdot x} = kürzen \rightarrow \frac{\left(11x^3 - 6\right)}{3x}$$

Geübtere wissen: Potenzen werden gekürzt, indem die Hochzahlen subtrahiert werden

-> siehe Übungsleuchtturm Nr.016 und 017

2 Potenzen gleicher Basis werden dividiert, indem ihre Hochzahlen subtrahiert werden

entspricht dem Kürzen

$$\frac{3x^2 \cdot (11x^3 - 6)}{9x^3}$$

$\rightarrow Variable: im Nenner\ bleibt\ folgendes\ stehen: x^{3-2} = x^1 = x$

$Zähler: x^2\ fällt\ weg!$

$Zahl: \rightarrow 9:3 = 3$

$$\frac{3x^2 \cdot (11x^3 - 6)}{9x^3} = \frac{11x^3 - 6}{3x}$$

2.) als Probe = Kontrolle::

entweder

A) kürze im sogenannten V (siehe Erklärung unten)

wenn im Bruchterm (+ oder - ->in Summe oder Differenz) im Zähler „oben“ 2 Glieder

und ein Glied im Nenner „unten“ vorkommen

A) Nun kürzen wir im sogenannten V, da „oben“ 2 Glieder

und ein Glied im Nenner „unten“ vorkommen

$$\frac{33x^5 - 18x^2}{9x^3} =$$

Wir beginnen durch die **Potenz-Variable** zu kürzen.

Wir ermitteln die **niedrigste vorkommende Potenz**. Durch diese können wir logischerweise die höheren Potenzen kürzen, wenn diese in jenen enthalten ist und in **allen Gliedern** vorkommt.

Wir sehen: x^2

ist jene niedrigste Potenz, die in *allen 3 Gliedern*- sowohl in den beiden im Zähler als auch in jenem im Nenner enthalten ist.

Kürzen bedeutet die Hochzahlen (alle auftretende minus niedrigster vorkommender Hochzahl) zu **subtrahieren.**

Glied 1: (Zähler-„oben“) $x^{5-2} = x^3$

Glied 2: (Zähler) genau: $x^{2-2} = x^0 \quad = 1\,!!!!!!!$

Glied 3: (Nenner-„unten“) $x^{3-2} = x^1$

$$\frac{33x^5 - 18x^2}{9x^3} = gekürzt - ganz - genau \rightarrow = \frac{33x^3 - 18 \cdot 1}{9x^1}$$

Nun kürzen wir noch durch Zahlen:

$$\frac{33x^3 - 18 \cdot 1}{9x^1} = \rightarrow Kürzen\ durch\ Zahlen -> durch\ 3 \rightarrow = \frac{11x^3 - 6}{3x}$$

Vereinfacht oder herausgehoben werden kann nichts mehr.

$$\frac{33x^5 - 18x^2}{9x^3} = \boxed{\frac{11x^3 - 6}{3x}}$$

Ungeübtere „LangsamzerlegerInnen“ gehen so vor:

(Du kannst dir immer so helfen, solltest aber dann später nach der obigen Überlegung kürzen)

$$\frac{33x^5-18x^2}{9x^3}=\frac{3\cdot 11\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x-2\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot x}{3\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x}$$

Wir sehen: $x\cdot x$

ist jene niedrigste Potenz, die in allen 3 Gliedern- sowohl in den beiden im Zähler als auch im Nenner enthalten ist.

Nun streichen wir jeweils 2 multiplizierte x in allen Gliedern weg.

$$\frac{33x^5-18x^2}{9x^3}=\frac{3\cdot 11\cdot x\cdot x-2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot x}$$

Nun kürzen wir noch die Zahlen:

$$\frac{33x^5-18x^2}{9x^3}=\frac{3\cdot 11\cdot x\cdot x-2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot x}=\to durch 3\to\frac{11\cdot x\cdot x-2\cdot 3}{3\cdot x}$$

Zusatz Nr.002:

1.)

So führst du dann gleich die allgemeine Probe durch:

(diese Probe hat mit der anderen Methode 2.) (Probe=Kontrolle) in den beiden Typen- siehe Bemerkung vorhin- nichts zu tun!)

Zusatz zum Angabetext des Musterbeispiels Nr.002:
Führe die Probe für die Richtigkeit deines Heraushebens und Kürzens für $x=2$ durch!

$$Anfangsterm \quad T_A = \frac{33x^5-18x^2}{9x^3} .... \rightarrow Angabe$$

$$Endterm \quad T_E = \frac{11x^3-6}{3x} ..... \rightarrow vereinfachtes \quad Ergebnis$$

zu zeigen ist:

$$\frac{33x^5-18x^2}{9x^3} = \frac{11x^3-6}{3x}$$

also

$$\boxed{\rightarrow T_A = T_E}$$

$$T_A = T(x=2) = \frac{33\cdot 2^5 - 18\cdot 2^2}{9\cdot 2^3} = \frac{33\cdot 32 - 18\cdot 4}{9\cdot 8} = \frac{1056-72}{72} = \frac{984}{72} = \frac{41}{3}$$

$$T_E = T(x=2) = \frac{11\cdot 2^3 - 6}{3\cdot 2} = \frac{11\cdot 8 - 6}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}$$

$$\boxed{\rightarrow T_A = T_E}$$

Dies gilt für jede beliebige Zahl, die wir für x wählen!!

Zusatz Nr.002:

2.)

Überlegungen zu einer neuen alternativen (andersartigen) Formulierung :

Wichtige grundlegende Begriffe rund um die mathematische Termrechnung

Nicht immer ist die Fragestellung so formuliert –nämlich:

Welchen Wert darf hier nun die Variable nicht annehmen? Anders ausgedrückt:

Welche Zahl dürfen wir in den Nenner nicht einsetzen?? Dieser darf ja nicht Null werden!!!

Viele Aufgaben sind so im Angabetext so gestellt/gegeben, dass eine gewisse **Grundmenge G** angegeben ist und eine **Definitionsmenge D** von dir ermittelt werden muss, nämlich welche Gestalt diese besitzt.

Die Grundmenge G ist oft die Menge der sogenannten **reellen Zahlen R** (das sind sozusagen überhaupt alle Zahlen, die es in der Mathematik gibt-eine noch größere Menge als die rationalen Zahlen Q-> siehe ***Wissensleuchtturm*** *der 3,4.& UE-Klasse* -ein noch größerer Kreis als Q im Mengendiagramm)

$$G = R$$

Die Grundmenge G ist auch oft die Menge der ganzen Zahlen Z, die wir ja bereits ebenso gut kennen-die kleinste Zahlenmenge (neben Menge der natürlichen Zahlen, die noch kleiner ist).

$$G = Z$$

Also ebenso möglich:

$$G = N$$

Präge dir die Begriffe wie Definitionsmenge, Grundmenge (hier übersichtsmäßig verwendet) gut ein!

Definition:

Grundmenge G

Die Grundmenge G enthält jene Zahlen, die überhaupt als Lösungen in Betracht bekommen.

Anders formuliert, sie stellt die Menge jener Zahlen dar, die zur Belegung der Variablen zugelassen sind.

$G = N \quad G = Z \quad G = Q \quad G = R$

(von der kleinsten Zahlenmenge zur größten geordnet)

Definitionsmenge D

Die Definitionsmenge D ist die Menge jener Zahlen der Grundmenge G, für welche der/die auftretenden Term(e) definiert sind.

Anders formuliert: Jene Teilmenge der Grundmenge G, für welche die Gleichung definiert/bestimmt ist.

Präge dir die Begriffe wie Definitionsmenge, Grundmenge (hier übersichtsmäßig verwendet) von der Vorseite gut ein!

Dürfen wir x = 0 in den Angabeterm $\frac{33x^5 - 18x^2}{9x^3}$ einsetzen?

Darf 0 in der Definitionsmenge D enthalten sein????

Welche(r) Wert(e) darf/dürfen in der Definitionsmenge D liegen?

Die Grundmenge G sei hier R (reelle Zahlen)

Welche Zahl dürfen wir in den Nenner nicht einsetzen?

Mit welcher Zahl dürfen wir die Variable x nicht belegen???

Wir können nur logisch intuitiv überlegen, denn den Nenner $9x^3 = 0$

Null zu setzen haben wir noch nicht gelernt, dies folgt erst in der Oberstufe….

siehe nächste Seite

Wenn x = 0, dann tritt Null im Nenner auf, zur dritten Potenz mit 9 multipliziert

aber:

$$\frac{33\cdot 0^5 - 18\cdot 0^2}{9\cdot 0^3} = \frac{33\cdot 0 - 18\cdot 0}{9\cdot 0} = \frac{0}{0} \to \textit{nicht definiert}!!!!!!$$

Null darf schon im Nenner sowieso nie stehen, hier tritt Null auch im Zähler auf.

Null (und jede Zahl) durch Null ist in der Mathematik streng „verboten"/nicht definiert

Daher dürfen in der Definitionsmenge D alle Zahlen außer Null stehen.

D=R\ $\{0\}$ \ **........Symbol für „ohne"**

Falls die Grundmenge die reellen („alle") Zahlen sind:

Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen ohne Null

-> siehe Übungsleuchtturm der 3.Klasse Nr.011- Terme-Teil1! z.B. Seite 21

Bemerkung: Für die Frage: Welche Zahl dürfen wir in den Nenner nicht einsetzen?

Mit welcher Zahl dürfen wir die Variable x nicht belegen???

Überlegung zum Null-setzen des Nenners (Lösen einer Gleichung) wie im *Übungsleuchtturm der 3.Klasse Nr.011- Terme-Teil1!*

Hier in unserem Beispiel 002:

$$\frac{33x^5 - 18x^2}{9x^3}$$

$\rightarrow 9x^3 = 0$

Wir können nur logisch intuitiv überlegen, denn den Nenner $9x^3 = 0$

Null zu setzen haben wir noch nicht gelernt, dies folgt erst in der Oberstufe….

9 mal welche Zahl mal welcher selber Zahl mal welcher selber Zahl ergibt Null???

(dies bedeutet ja hoch 3)

-> es **kann nur Null sein, denn nur 0 mal 0 mal 0 = 0**

daher: $x = 0$

Die Folgerung für unser Beispiel:

$\boxed{x \neq 0}$

Bemerkung zu Musterbeispiel Nr.002:

Lautet die Angabe $\frac{33x^4 - 18x^2}{9x^3}$

Es liegt **Typ 2** vor:

Die Binomische Formel $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ ist **nicht** (sinnvoll mit ganzzahligen Wurzeln) **primär** anwendbar weder im Zähler noch im Nenner des Bruchterms

Wir könnten zwar im Zähler die binomische Formel anwenden:

$$\frac{33x^4 - 18x^2}{9x^3} = \frac{\left(\sqrt{33}x^2 - \sqrt{18}x\right)\cdot\left(\sqrt{33}x^2 + \sqrt{18}x\right)}{9x^3}$$

Es treten keine ganzzahligen Wurzeln in den Linearfaktoren auf (keine ganzen Zahlen)

Daher ist diese Überlegung nicht zielführend.

Wir können im sogenannten V ohne die Binomische Formel kürzen.

-> weitere wichtige Musterbeispiele

mit *genauen Erklärungen*

im Übungsleuchtturm Nr.024

ab *Musterbeispiel Nr.003*

ab S 35 !!!!